Inecuaciones

- ¿Qué es una **ine**cuación? Es una **des**igualdad entre dos expresiones con uno o más valores desconocidos (incógnita).
  - una desigualdad es una expresión que incluye alguno de los siguientes símbolos de orden $<$, $>$ (desigualdades estrictas), $\leq$, $\geq$ (desigualdades amplias).
- ¿Qué significa resolver una inecuación? Es hallar el o los valores de las incógnitas que hacen que la desigualdad se cumpla. Los llamamos solución de la inecuación.
  - Las soluciones en general son infinitas y se utiliza la notación de intervalos.
  - La solución puede nuevamente depender del contexto del problema.

Inecuaciones

- ¿Qué es una **ine**cuación? Es una **des**igualdad entre dos expresiones con uno o más valores desconocidos (incógnita).
    - una desigualdad es una expresión que incluye alguno de los siguientes símbolos de orden $<$, $>$ (desigualdades estrictas), $\leq$, $\geq$ (desigualdades amplias).
- ¿Qué significa resolver una inecuación? Es hallar el o los valores de las incógnitas que hacen que la desigualdad se cumpla. Los llamamos solución de la inecuación.
    - Las soluciones en general son infinitas y se utiliza la notación de intervalos.
    - La solución puede nuevamente depender del contexto del problema.

Inecuaciones

- ¿Verificación? Al ser infinitas soluciones no podemos verificar todas pero si podemos verificar para algún valor dentro y algún valor fuera del conjunto solución.
- Para resolver inecuaciones vamos a ir transformando la inecuación en inecuaciones equivalentes (que tengan las mismas soluciones que la original) cada vez más sencillas.
- La principal diferencia con las ecuaciones es que hay operaciones que invierten el sentido de la desigualdad.

Inecuaciones

- ¿Verificación? Al ser infinitas soluciones no podemos verificar todas pero si podemos verificar para algún valor dentro y algún valor fuera del conjunto solución.
- Para resolver inecuaciones vamos a ir transformando la inecuación en inecuaciones equivalentes (que tengan las mismas soluciones que la original) cada vez más sencillas.
- La principal diferencia con las ecuaciones es que hay operaciones que invierten el sentido de la desigualdad.

Inecuaciones

- ¿Verificación? Al ser infinitas soluciones no podemos verificar todas pero si podemos verificar para algún valor dentro y algún valor fuera del conjunto solución.
- Para resolver inecuaciones vamos a ir transformando la inecuación en inecuaciones equivalentes (que tengan las mismas soluciones que la original) cada vez más sencillas.
- La principal diferencia con las ecuaciones es que hay operaciones que invierten el sentido de la desigualdad.

Propiedades de monotonía

Sentido de desigualdades para algunas operaciones (Carena, pág. 135)

O.1 $x \leq y \Leftrightarrow x + c \leq y + c$ para cualquier c real.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $x + 2 \leq 1 + 2$ y $x - 2 \leq 1 - 2$.

O.2 $x \leq y \Leftrightarrow cx \leq cy$ para cualquier $c > 0$.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $2x \leq 2$

O.3 $x \leq y \Leftrightarrow cx \geq cy$ para cualquier $c < 0$.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $-2x \geq -2$

O.4 si $xy > 0$ (las dos variables del mismo signo) entonces $x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

Ejemplo1: $2 \leq 4$ si y solo si $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$

Ejemplo2: $-3 \leq -2$ si y solo si $-\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{2}$

Ejemplo3: $x \leq 1$ entonces $\frac{1}{x} \leq\geq 1$ depende del signo de x!

Propiedades de monotonía

Sentido de desigualdades para algunas operaciones (Carena, pág. 135)

O.1 $x \leq y \Leftrightarrow x + c \leq y + c$ para cualquier c real.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $x + 2 \leq 1 + 2$ y $x - 2 \leq 1 - 2$.

O.2 $x \leq y \Leftrightarrow cx \leq cy$ para cualquier $c > 0$.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $2x \leq 2$

O.3 $x \leq y \Leftrightarrow cx \geq cy$ para cualquier $c < 0$.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $-2x \geq -2$

O.4 si $xy > 0$ (las dos variables del mismo signo) entonces $x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

Ejemplo1: $2 \leq 4$ si y solo si $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$

Ejemplo2: $-3 \leq -2$ si y solo si $-\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{2}$

Ejemplo3: $x \leq 1$ entonces $\frac{1}{x} \leq \geq 1$ depende del signo de x!

Propiedades de monotonía

Sentido de desigualdades para algunas operaciones (Carena, pág. 135)

O.1 $x \leq y \Leftrightarrow x + c \leq y + c$ para cualquier c real.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $x + 2 \leq 1 + 2$ y $x - 2 \leq 1 - 2$.

O.2 $x \leq y \Leftrightarrow cx \leq cy$ para cualquier $c > 0$.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $2x \leq 2$

O.3 $x \leq y \Leftrightarrow cx \geq cy$ para cualquier $c < 0$.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $-2x \geq -2$

O.4 si $xy > 0$ (las dos variables del mismo signo) entonces $x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

Ejemplo1: $2 \leq 4$ si y solo si $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$

Ejemplo2: $-3 \leq -2$ si y solo si $-\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{2}$

Ejemplo3: $x \leq 1$ entonces $\frac{1}{x} \leq \geq 1$ depende del signo de x!

Propiedades de monotonía

Sentido de desigualdades para algunas operaciones (Carena, pág. 135)

O.1 $x \leq y \Leftrightarrow x + c \leq y + c$ para cualquier c real.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $x + 2 \leq 1 + 2$ y $x - 2 \leq 1 - 2$.

O.2 $x \leq y \Leftrightarrow cx \leq cy$ para cualquier $c > 0$.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $2x \leq 2$

O.3 $x \leq y \Leftrightarrow cx \geq cy$ para cualquier $c < 0$.

Ejemplo: $x \leq 1$ si y solo si $-2x \geq -2$

O.4 si $xy > 0$ (las dos variables del mismo signo) entonces $x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

Ejemplo1: $2 \leq 4$ si y solo si $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$

Ejemplo2: $-3 \leq -2$ si y solo si $-\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{2}$

Ejemplo3: $x \leq 1$ entonces $\frac{1}{x} \leq \geq 1$ depende del signo de x!

Propiedades de monotonía

O.5 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces $x \leq y \Leftrightarrow x^q \leq y^q$ para cualquier $q > 0$.

Ejemplo1: $2 \leq 4$ entonces $2^2 \leq 4^2$ y $2^{1/3} \leq 4^{1/3}$.

¿Qué pasa si elevo a la $-1/3$?

Ejemplo2: $4 \leq 5$ si y solo si $4^{-1/3} \geq 5^{-1/3}$.

O.6 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces $x \leq y \Leftrightarrow \log_a(x) \leq \log_a(y)$ cuando $a > 1$.

Ejemplo: $2 \leq 4$ si y solo si $\log_2(2) \leq \log_2(4)$

O.7 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces $x \leq y \Leftrightarrow \log_a(x) \geq \log_a(y)$ cuando $0 < a < 1$.

Ejemplo: $2 \leq 4$si y solo si $\log_{1/2}(2) \geq \log_{1/2}(4)$

Las mismas propiedades valen reemplazando los signos $\leq$ (menor o igual) por $<$ (menor estricto), y los signos $\geq$ (mayor o igual) por $>$ (mayor estricto).

Propiedades de monotonía

O.5 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces $x \leq y \Leftrightarrow x^q \leq y^q$ para cualquier $q > 0$.

Ejemplo1: $2 \leq 4$ entonces $2^2 \leq 4^2$ y $2^{1/3} \leq 4^{1/3}$.

¿Qué pasa si elevo a la $-1/3$?

Ejemplo2: $4 \leq 5$ si y solo si $4^{-1/3} \geq 5^{-1/3}$.

O.6 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces $x \leq y \Leftrightarrow \log_a(x) \leq \log_a(y)$ cuando $a > 1$.

Ejemplo: $2 \leq 4$ si y solo si $\log_2(2) \leq \log_2(4)$

O.7 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces $x \leq y \Leftrightarrow \log_a(x) \geq \log_a(y)$ cuando $0 < a < 1$.

Ejemplo: $2 \leq 4$si y solo si $\log_{1/2}(2) \geq \log_{1/2}(4)$

Las mismas propiedades valen reemplazando los signos $\leq$ (menor o igual) por $<$ (menor estricto), y los signos $\geq$ (mayor o igual) por $>$ (mayor estricto).

Propiedades de monotonía

O.5 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces $x \leq y \Leftrightarrow x^q \leq y^q$ para cualquier $q > 0$.

Ejemplo1: $2 \leq 4$ entonces $2^2 \leq 4^2$ y $2^{1/3} \leq 4^{1/3}$.

¿Qué pasa si elevo a la $-1/3$?

Ejemplo2: $4 \leq 5$ si y solo si $4^{-1/3} \geq 5^{-1/3}$.

O.6 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces $x \leq y \Leftrightarrow \log_a(x) \leq \log_a(y)$ cuando $a > 1$.

Ejemplo: $2 \leq 4$ si y solo si $\log_2(2) \leq \log_2(4)$

O.7 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces $x \leq y \Leftrightarrow \log_a(x) \geq \log_a(y)$ cuando $0 < a < 1$.

Ejemplo: $2 \leq 4$si y solo si $\log_{1/2}(2) \geq \log_{1/2}(4)$

Las mismas propiedades valen reemplazando los signos $\leq$ (menor o igual) por $<$ (menor estricto), y los signos $\geq$ (mayor o igual) por $>$ (mayor estricto).

Propiedades de monotonía

O.5 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces $x \leq y \Leftrightarrow x^q \leq y^q$ para cualquier $q > 0$.
Ejemplo1: $2 \leq 4$ entonces $2^2 \leq 4^2$ y $2^{1/3} \leq 4^{1/3}$.
¿Qué pasa si elevo a la $-1/3$?
Ejemplo2: $4 \leq 5$ si y solo si $4^{-1/3} \geq 5^{-1/3}$.

O.6 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces
$x \leq y \Leftrightarrow \log_a(x) \leq \log_a(y)$ cuando $a > 1$.
Ejemplo: $2 \leq 4$ si y solo si $\log_2(2) \leq \log_2(4)$

O.7 si $x > 0, y > 0$ (los dos positivos) entonces
$x \leq y \Leftrightarrow \log_a(x) \geq \log_a(y)$ cuando $0 < a < 1$.
Ejemplo: $2 \leq 4$si y solo si $\log_{1/2}(2) \geq \log_{1/2}(4)$

Las mismas propiedades valen reemplazando los signos $\leq$ (menor o igual) por $<$ (menor estricto), y los signos $\geq$ (mayor o igual) por $>$ (mayor estricto).

Ejemplo

Considera la inecuación:

$$\sqrt{x+4} - 2 \geq x$$

1. En primer lugar observamos que para que $\sqrt{x+4}$ quede bien definida se debe cumplir que $x \geq -4$
2. Para comenzar a resolver aplicamos la propiedad [O.1] sumando 2 de ambos lados y llegamos a la inecuación equivalente
$$\sqrt{x+4} \geq x+2.$$
3. Ahora consideramos 2 casos:
   - Si $x+2<0$ entones $x<-2$ y la inecuación se cumple.
   - Si $x+2 \geq 0$ aplicamos la propiedad [O.5] para $q=2$ y obtenemos que $x+4 \geq x^2+4x+4$. Operando llegamos a la inecuación $0 \geq x(x+3)$ que se verifica para $-3 \leq x \leq 0$

Ejemplo

Considera la inecuación:

$$\sqrt{x+4} - 2 \geq x$$

1. En primer lugar observamos que para que $\sqrt{x+4}$ quede bien definida se debe cumplir que $x \geq -4$
2. Para comenzar a resolver aplicamos la propiedad [O.1] sumando 2 de ambos lados y llegamos a la inecuación equivalente
$$\sqrt{x+4} \geq x+2.$$
3. Ahora consideramos 2 casos:
   - Si $x+2 < 0$ entones $x < -2$ y la inecuación se cumple.
   - Si $x+2 \geq 0$ aplicamos la propiedad [O.5] para $q=2$ y obtenemos que $x+4 \geq x^2+4x+4$. Operando llegamos a la inecuación $0 \geq x(x+3)$ que se verifica para $-3 \leq x \leq 0$

Ejemplo

Considera la inecuación:

$$\sqrt{x+4} - 2 \geq x$$

1. En primer lugar observamos que para que $\sqrt{x+4}$ quede bien definida se debe cumplir que $x \geq -4$
2. Para comenzar a resolver aplicamos la propiedad [O.1] sumando 2 de ambos lados y llegamos a la inecuación equivalente
$$\sqrt{x+4} \geq x+2.$$
3. Ahora consideramos 2 casos:
   - Si $x+2<0$ entones $x<-2$ y la inecuación se cumple.
   - Si $x+2 \geq 0$ aplicamos la propiedad [O.5] para $q=2$ y obtenemos que $x+4 \geq x^2+4x+4$. Operando llegamos a la inecuación $0 \geq x(x+3)$ que se verifica para $-3 \leq x \leq 0$

Ejemplo

Considera la inecuación:

$$\sqrt{x+4}-2 \geq x$$

1. En primer lugar observamos que para que $\sqrt{x+4}$ quede bien definida se debe cumplir que $x \geq -4$
2. Para comenzar a resolver aplicamos la propiedad [O.1] sumando 2 de ambos lados y llegamos a la inecuación equivalente
$$\sqrt{x+4} \geq x+2.$$
3. Ahora consideramos 2 casos:
   - Si $x+2<0$ entones $x<-2$ y la inecuación se cumple.
   - Si $x+2 \geq 0$ aplicamos la propiedad [O.5] para $q=2$ y obtenemos que $x+4 \geq x^2+4x+4$. Operando llegamos a la inecuación $0 \geq x(x+3)$ que se verifica para $-3 \leq x \leq 0$

Ejemplo

Considera la inecuación:

$$\sqrt{x+4} - 2 \geq x$$

1. En primer lugar observamos que para que $\sqrt{x+4}$ quede bien definida se debe cumplir que $x \geq -4$
2. Para comenzar a resolver aplicamos la propiedad [O.1] sumando 2 de ambos lados y llegamos a la inecuación equivalente
$$\sqrt{x+4} \geq x+2.$$
3. Ahora consideramos 2 casos:
   - Si $x+2<0$ entones $x<-2$ y la inecuación se cumple.
   - Si $x+2 \geq 0$ aplicamos la propiedad [O.5] para $q=2$ y obtenemos que $x+4 \geq x^2+4x+4$. Operando llegamos a la inecuación $0 \geq x(x+3)$ que se verifica para $-3 \leq x \leq 0$

Recopilando toda la información:

- La inecuación tiene sentido en $[-4, +\infty)$
- En $[-4, -2)$ se verifica.
- Dentro de $[-2, +\infty)$ se verifica en $[-2, +\infty) \cap [-3, 0] = [-2, 0]$
- Entonces se verifica en $[-4, -2) \cup [-2, 0] = [-4, 0]$.

Recopilando toda la información:

- La inecuación tiene sentido en $[-4, +\infty)$
- En $[-4, -2)$ se verifica.
- Dentro de $[-2, +\infty)$ se verifica en $[-2, +\infty) \cap [-3, 0] = [-2, 0]$
- Entonces se verifica en $[-4, -2) \cup [-2, 0] = [-4, 0]$.