Capítulo 4

Ecuaciones e inecuaciones

4.1. El lenguaje matemático

Innumerables situaciones correspondientes a diversas áreas y situaciones cotidianas pueden ser modeladas mediante ecuaciones e inecuaciones. Para resolver un problema matemáticamente, el primer paso es traducirlo del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico. Este es precisamente el objetivo de esta sección: traducir una situación concreta al lenguaje matemático, transformándola en una ecuación, inecuación o un sistema de ellas (cómo resolver el planteo obtenido será el objetivo de las siguientes secciones).

Antes de "traducir" problemas concretos, comencemos expresando cosas más simples. En la siguiente lista se escriben en lenguaje matemático algunas frases frecuentes. Comprender esta forma de expresarlas será fundamental para el planteo de problemas específicos.

- El doble de un número $x \rightsquigarrow 2x$
- Las tres cuartas partes de un número $x \rightsquigarrow \frac{3}{4}x$
- Se aumenta en 5 al triple de un número $y \rightsquigarrow 3y + 5$
- El triple del número y, más 5 $\rightsquigarrow 3y + 5$
- El triple del número y más 5 $\rightsquigarrow 3(y + 5)$
- La mitad del consecutivo de un número entero $x \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x + 1)$
- El cuadrado de la mitad de un número $z \rightsquigarrow \left(\frac{z}{2}\right)^2$
- El número x supera al número y en 30 unidades $\rightsquigarrow x = y + 30$*
- Un número entero x más su consecutivo $\rightsquigarrow x + (x + 1)$

*Es frecuente ver que esta expresión es traducida como $x + 30 = y$. Este error puede evitarse pensando que si el número x supera a y, significa que y es más pequeño, por lo que hay que sumarle a él la cantidad necesaria para igualar a x.

Ahora sí, plantearemos en lenguaje algebraico algunas situaciones concretas.

Ejemplo 82. **Usando el lenguaje matemático.** Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 84. ¿Cuál es el número?

Solución: Llamemos x al número buscado (este paso es fundamental, es decir, antes de comenzar a plantear un problema se debe indicar siempre qué representa cada letra o símbolo utilizado). En el enunciado aparecen involucrados el doble del número (es decir $2x$) y también su mitad ($x/2$), y establece que

$$2x - \tfrac{x}{2} = 84.$$

En la sección siguiente veremos cómo resolver la igualdad anterior, por ahora solamente nos centraremos en el planteo. «

Ejemplo 83. En un avión viajan 420 pasajeros de tres países: argentinos, uruguayos y chilenos. Hay 40 chilenos más que uruguayos, y de argentinos hay el doble que de uruguayos y chilenos juntos. ¿Cuántos hay de cada país?

Solución: Denotemos con y a la cantidad de uruguayos que viajan en el avión. Entonces la cantidad de chilenos es $y + 40$, y la cantidad de argentinos se representa como $2(y + (y + 40))$. Luego, la traducción algebraica del problema es

$$y + (y + 40) + 2(y + (y + 40)) = 420.$$

«

☞ El planteo matemático de algunos problemas es más sencillo si trabajamos con más de una incógnita. Este es el caso de las siguientes situaciones.

Ejemplo 84. **Usando más de una incógnita.** Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 24 unidades, y cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor.

Solución: Para traducir esta situación al lenguaje matemático, podemos llamarle x a la longitud del lado menor del rectángulo, e y a la del lado mayor. Puesto que su perímetro es 24, sabemos que

$$2x + 2y = 24. \qquad (A)$$

Además se afirma que el lado mayor mide el triple que el menor, es decir

$$y = 3x. \qquad (B)$$

Las dos igualdades (A) y (B) deben cumplirse simultáneamente. Esto se conoce con el nombre de "sistema de ecuaciones", y su resolución será estudiada en la Sección 4.4. «

Ejemplo 85. Determinar las edades de dos personas sabiendo que la suma de sus edades hoy es de 64 años, y que dentro de 8 años el mayor tendrá el triple de edad que el menor.

Solución: Llamemos x a la edad que tiene hoy la persona menor, e y a la edad que tiene hoy la mayor. Sabemos que

$$x + y = 64. \quad (a)$$

La edad de cada una dentro de 8 años es $x + 8$ e $y + 8$, respectivamente. En ese momento, el mayor tendrá el triple que el menor, por lo que para que sean iguales hay que multiplicar la edad del menor por 3 (o dividir a la del mayor por 3). Es decir

$$3(x + 8) = y + 8. \quad (b)$$

Al igual que antes, las igualdades (a) y (b) deben cumplirse a la vez. «

Finalmente, veremos problemas en los que aparecen una o más desigualdades en lugar de una igualdad, las cuales reciben el nombre de inecuaciones, y serán estudiadas en detalle en secciones posteriores.

Ejemplo 86. Usando desigualdades. Si al doble de la edad de Jeremías se le resta 19 años, el resultado es menor que 37. Pero si al tercio de su edad se le suma 10, entonces el resultado es mayor que 18. ¿Cómo se expresan mediante desigualdades estas expresiones?

Solución: Si llamamos x a la edad de Jeremías, el enunciado afirma las dos condiciones siguientes:

$$2x - 19 < 37 \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{3} + 10 > 18.$$ «

En las secciones siguientes nos ocuparemos de resolver los planteos anteriores: ecuaciones, inecuaciones y sistemas.

Ejercicios 4.1

Expresar en lenguaje matemático las siguientes situaciones problemáticas (no resolverlas). Recordar definir siempre la/s variable/s involucrada/s, es decir, siempre se debe indicar qué representa cada letra utilizada.

1. El kilo de manzanas cuesta el doble que el kilo de limones. Si por 3 kilos de manzanas y 5 kilos de limones se pagó $165, ¿cuánto cuesta el kilo de cada uno?

2. Tres hermanos se reparten 1300 pesos. El mayor recibe el doble que el mediano, quien a su vez recibe el cuádruple que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

3. En un estadio de fútbol hay 43200 personas. Si sabemos que hay 4800 locales más que visitantes, ¿cuántos locales y cuántos visitantes hay?

4. Se han consumido las 7/8 partes de un bidón de agua. Añadiendo 38 litros se llena hasta las 3/5 partes. Calcular la capacidad del bidón.

5. Agustín hizo un viaje en su auto, en el cual consumió 20 litros de nafta. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió 2/3 de la nafta que tenía el tanque, mientras que en la segunda etapa consumió la mitad de la nafta que le quedaba en el tanque luego de la primera. Hallar una igualdad para determinar los litros de nafta que tenía Agustín en el tanque antes de partir.

4.2. Resolución de ecuaciones

Si se comprende el proceso que se utiliza, resolver ecuaciones puede ser más simple de lo que uno imagina. Comencemos recordando qué es una ecuación.

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones conteniendo uno o más valores desconocidos.

Las expresiones que aparecen a ambos lados del símbolo = (igual) se llaman **miembros** de la ecuación.

Aprenderemos a resolver ecuaciones que tengan solamente un valor desconocido. Al valor desconocido se lo llama **incógnita**, y se lo suele denotar con x, pero puede representarse con cualquier otra letra.

Antes de ver cómo resolver ecuaciones, hay que entender qué significa esto. **Resolver** una ecuación es simplemente hallar el valor (o los valores) de la incógnita, de manera que la igualdad sea cierta si reemplazamos dicha incógnita por cualquiera de los valores hallados. Dependiendo del caso, el valor buscado puede ser único, pueden existir varios valores que hagan la igualdad cierta, o puede ocurrir que no exista ninguno. Cualquier valor que haga cierta la igualdad se llama **solución** de la ecuación. Luego, una ecuación puede tener una única solución, varias o ninguna, y es llamada **identidad** cuando es verdadera para cualquier valor de la incógnita. Cuando la ecuación esté modelando un problema concreto, habrá que elegir entre todas las soluciones de la ecuación, aquellas que tengan sentido en el contexto del problema, y descartar las que no lo tengan (ver Ejemplo 112).

Notar que siempre es posible saber por nuestra cuenta si hemos resuelto correctamente la ecuación. Por ejemplo, para saber si $x = 1$ es solución de la ecuación

$$x + 3 = 5 - x,$$

podemos reemplazar x por 1 en ambos lados de la igualdad (miembros) para obtener

$$1 + 3 = 5 - 1,$$

lo cual es cierto ya que el resultado es 4 en ambos.

El procedimiento anterior se denomina **verificación**, y consiste en comprobar que la igualdad se cumple al reemplazar la incógnita por el o los valores obtenidos.

Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones. Utilizaremos el símbolo $\Longleftrightarrow$ (que se lee "si y solo si") para conectar dos ecuaciones que son equivalentes. La clave para resolver una ecuación es transformarla en ecuaciones equivalentes cada vez más simples, utilizando la **propiedad uniforme**. Esta propiedad establece que:

> Si se realiza la misma operación con el mismo número en ambos miembros de una ecuación, se mantiene la igualdad.

☞ La propiedad uniforme es la base para resolver ecuaciones, y es la que justifica lo que en lenguaje coloquial expresamos como "pasar" algo de un lado a otro de la igualdad. La palabra "pasar" simplemente abrevia una serie de pasos matemáticos utilizados con el fin de llegar a *despejar* la incógnita x. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$6(x-4)^3 - 15 = 33$$

lo primero que uno hace es "pasar" al otro lado el número 15 sumando. Pero, ¿por qué lo pasa sumando? Comprender esto es la clave para lograr resolver en forma correcta las ecuaciones. En realidad, matemáticamente lo que se hace es lo siguiente:

$$\begin{aligned} 6(x-4)^3 - 15 + 15 &= 33 + 15 && \text{sumar 15 a ambos lados} \\ 6(x-4)^3 + 0 &= 33 + 15 && -15 + 15 = 0 \text{ por ser opuestos} \\ 6(x-4)^3 &= 48 && 33 + 15 = 48. \end{aligned}$$

En lo anterior usamos la propiedad uniforme en el primer paso, luego usamos la propiedad asociativa de la suma, la propiedad de existencia del opuesto y, finalmente, que el cero es neutro para la suma. Todas esas operaciones y propiedades se resumen al decir informalmente que "pasamos" el 15 sumando, y en la práctica los pasos intermedios se omiten o reducen.

De la misma forma, con el fin de despejar x ahora "pasamos" el número 6 para el otro lado. En este caso, como está multiplicando "pasa" para el otro lado dividiendo, ya que para eliminarlo lo que hacemos es dividir ambos lados de la igualdad por 6:

$$\frac{\cancel{6}(x-4)^3}{\cancel{6}} = \frac{48}{6} \qquad \boxed{\text{dividir ambos miembros por 6}}$$

$$(x-4)^3 = 8 \qquad \boxed{\tfrac{6}{6} = 1, \text{ por eso se “cancelan”.}}$$

Ahora, aplicamos raíz cúbica a ambos lados (es la forma de “pasar” el número 3 que está como exponente hacia el otro miembro), y resolvemos para obtener

$$x - 4 = 2.$$

En lo anterior hemos usado la fórmula (2.3.3) (página 52) ya que, al ser 3 un número impar, el cubo y la raíz cúbica se “cancelan” directamente. Finalmente, sumamos 4 a ambos lados (informalmente, “pasamos el 4 sumando”) y se obtiene $x = 6$. Por fortuna, podemos verificar si este valor es correcto, poniendo 6 en cada lugar donde decía x en la ecuación original:

$$6(6-4)^3 - 15 = 33.$$

Es fácil ver que el lado izquierdo da como resultado 33, así que la respuesta $x = 6$ es correcta.

☞ **Es muy importante dar la respuesta al problema**, es decir, indicar el conjunto S cuyos elementos son las soluciones para la ecuación. En este caso, tenemos $S = \{6\}$.

⚠ Se debe notar que no hay una única manera de resolver una ecuación, pero sí es importante tener en cuenta la jerarquía entre las operaciones: para despejar la incógnita siempre se comienza “pasando” al otro lado lo que está “más lejos” de ella, en el sentido de la resolución de operaciones combinadas. Por ejemplo, una vez obtenido

$$6(x-4)^3 = 48$$

hubiera sido incorrecto si en el paso siguiente escribimos

$$6(x-4) = \sqrt[3]{48}. \quad ✗$$

El error se detecta rápidamente si, ante la duda, en lugar de “pasar” la potencia aplicamos raíz cúbica a ambos lados:

$$6(x-4)^3 = 48 \iff \sqrt[3]{6(x-4)^3} = \sqrt[3]{48} \iff \sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[\cancel{3}]{(x-4)^{\cancel{3}}} = \sqrt[3]{48},$$

es decir,

$$\sqrt[3]{6}\cdot(x-4) = \sqrt[3]{48}. \quad ✓$$

Esto muestra un camino diferente de proceder, “pasando” correctamente la raíz cúbica antes que el 6, el cual también es válido.

Veremos ahora algunos ejemplos de resolución de ecuaciones, ilustrando diferentes técnicas según el caso, así como ciertos errores frecuentes con el fin de evitarlos luego. Es importante la lectura de los mismos, ya que contienen las herramientas fundamentales para la resolución de ecuaciones.

Ejemplo 87. Resolver la ecuación $6(x+2)-21=3(x+1)$.

Solución:

$6(x+2)-21=3(x+1)$	
$6x+12-21=3x+3$	propiedad distributiva del producto
$6x-9=3x+3$	se resolvió $12-21$
$6x-3x=9+3$	se sumó $9-3x$ en ambos miembros
$3x=12$	se resolvió
$x=4$	se dividieron ambos miembros por 3.

El paso "se sumó $9-3x$ en ambos miembros" es lo que suele expresarse informalmente como "llevamos a un lado todo lo que tiene x, y al otro lo que no tiene x".

Luego de realizar la verificación (este es un paso que debe hacerse siempre, aunque lo omitiremos algunas veces aquí), podemos concluir que el conjunto solución de la ecuación es $S=\{4\}$. «

Ejemplo 88. Un error frecuente.

Cuando no se comprende el proceso utilizado para despejar la incógnita en una ecuación, pueden cometerse errores como el siguiente:

$$6x=30 \iff x=\frac{30}{-6}=-5. \quad ✗$$

Es decir, el número 6 que está multiplicando a la incógnita se lo "pasa" dividiendo, y como es positivo se lo "pasa" además como negativo. Incluso a veces, por ser positivo, suele verse lo siguiente:

$$6x=30 \iff x=30-6=24. \quad ✗$$

Todos estos errores pueden evitarse pensando cuál es la propiedad que hace que el número 6 se "elimine" del lado izquierdo: dividir ambos miembros por 6 como sigue

$$6x=30 \iff \frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}}=\frac{30}{6} \iff x=5. \quad ✓$$ «

Ejemplo 89. Resolver la ecuación $5^2 + 3\sqrt{2x-6} = 2^3 5 - 9$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
5^2 + 3\sqrt{2x-6} &= 2^3 5 - 9 \\
25 + 3\sqrt{2x-6} &= 31 && \text{se resolvió } 5^2 \text{ y también } 2^3 5 - 9 \\
3\sqrt{2x-6} &= 31 - 25 && \text{se restó 25 en ambos miembros} \\
3\sqrt{2x-6} &= 6 && \text{se resolvió } 31 - 25 \\
\sqrt{2x-6} &= \tfrac{6}{3} && \text{se dividieron ambos miembros por 3} \\
\sqrt{2x-6} &= 2 && \text{se resolvió } \tfrac{6}{3} \\
2x - 6 &= 2^2 && \text{se elevaron ambos miembros al cuadrado} \\
2x &= 4 + 6 && \text{se sumó 6 en ambos miembros} \\
2x &= 10 && \text{se resolvió el miembro derecho} \\
x &= \tfrac{10}{2} && \text{se dividieron ambos miembros por 2} \\
x &= 5. && \text{se resolvió } \tfrac{10}{2}
\end{aligned}
$$

Luego de realizar la verificación, podemos concluir que el conjunto solución de la ecuación es $S = \{5\}$. «

En lo anterior, uno de los pasos consistió en "elevar al cuadrado" ambos miembros de la ecuación. Como se muestra en el ejemplo siguiente, esto a veces puede introducir una solución ficticia, por lo que la verificación se convierte, en este caso, en un paso fundamental para la resolución de la ecuación.

Ejemplo 90. **Cuidado al elevar al cuadrado.**

Supongamos que tenemos la ecuación $\sqrt{x-3} = -2$, y para resolverla elevamos ambos miembros al cuadrado para eliminar el radical. Entonces obtenemos

$$x - 3 = (-2)^2 = 4,$$

lo cual implica $x = 7$. Verifiquemos si $x = 7$ es solución de la ecuación:

$$\sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2 \neq -2. \quad ✗$$

¿Por qué elevar al cuadrado generó una solución incorrecta? Si observamos la ecuación original, del lado izquierdo tenemos una cantidad positiva (o cero), mientras que del derecho, una negativa. Esto permite concluir que ningún valor de x hará cierta esta igualdad, es decir, $S = \varnothing$. Al elevar al cuadrado ambos miembros los convertimos en positivos, y generamos así soluciones para la nueva ecuación, que no necesariamente resuelven la original. A continuación ampliaremos esto, y veremos cómo proceder en estos casos para determinar la solución de la ecuación dada. «

? En el ejemplo anterior, ¿cuál es la operación que generó una solución ficticia? Cuando, para eliminar el radical, elevamos un número a una potencia *par* podemos introducir una **solución ficticia**. El motivo es el siguiente:

$$a = b \Rightarrow a^2 = b^2.$$

Sin embargo,

$$a^2 = b^2 \not\Rightarrow a = b \qquad \text{pues lo correcto es} \qquad a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b|,$$

ya que $\sqrt{x^2} = |x|$, según la fórmula (2.3.3) en la página 52 aplicada para $n = 2$.

El razonamiento matemático para cuando trabajamos con implicaciones en lugar de equivalencias es el siguiente: si x es solución de la ecuación original, entonces debe satisfacer la obtenida al elevar la misma al cuadrado. Eso no significa que lo recíproco sea cierto: no todo valor que satisfaga la ecuación resultante de elevar al cuadrado la original, será solución de ella. **La importancia de los valores obtenidos al resolver la nueva ecuación es que, si la original tiene soluciones, estas se encontrarán entre dichos valores.** Luego, para hallar las soluciones de la ecuación dada, simplemente debemos verificar cuáles de estos valores la satisfacen. Si ninguno lo hace, la ecuación no tiene solución. Este es el procedimiento que debe efectuarse siempre que se trabaje con ecuaciones que involucren radicales. En el Ejemplo 102 volveremos a ilustrar esto.

Ejemplo 91. **Ecuaciones con valor absoluto.** Resolver $2|x - 4| - 1 = 5$.

Solución:

$$2|x-4| - 1 = 5 \iff 2|x-4| = 6 \iff |x-4| = 3.$$

Si $|y| = 3$, por definición se tiene que $y = 3$ o $y = -3$. En símbolos,

$$|y| = 3 \iff y = 3 \quad \text{o} \quad y = -3.$$

En este caso, lo que cumple el rol de y es todo lo que está dentro del valor absoluto, es decir, $x - 4$. Luego

$$|x-4| = 3 \iff x - 4 = 3 \quad \text{o} \quad x - 4 = -3.$$

Estas dos igualdades arrojan $x = 3 + 4 = 7$, o bien $x = -3 + 4 = 1$. Luego, puesto que el conjunto solución S consiste en todas las soluciones posibles, tenemos que $S = \{7, 1\}$, como puede fácilmente verificarse. «

Como vimos en el Ejemplo 90, al elevar ambos miembros de una ecuación al cuadrado (o cualquier otra potencia par), se pueden introducir soluciones ficticias. La clave está en que $\sqrt{x^2} = |x|$ (y no simplemente x, como suele verse cuando se “simplifican” el índice con el exponente). Recordar esto es fundamental para no “perder” soluciones al aplicar raíces con índice par en ambos miembros de una igualdad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 92. Cuidado al cancelar índices y exponentes pares.

Considerar la ecuación $\frac{1}{2}(x+5)^2 = 8$. Veamos un error muy frecuente al resolver este tipo de ecuaciones, que lleva a "perder" soluciones:

$$\frac{1}{2}(x+5)^2 = 8 \iff (x+5)^2 = 16 \iff x+5 = 4 \iff x = -1. \quad ✗$$

Si bien $x = -1$ es una de las soluciones de la ecuación, al "pasar" la raíz en forma incorrecta perdimos otra de ellas. En este caso, la resolución correcta es

$$\frac{1}{2}(x+5)^2 = 8 \iff (x+5)^2 = 16 \iff \sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{16} \iff |x+5| = 4. \quad ✓$$

Esta última igualdad de traduce en las posibilidades

$$x+5 = 4 \qquad \text{o} \qquad x+5 = -4,$$

lo cual induce las dos soluciones $x = -1$ y $x = -9$. Entonces $S = \{-1, -9\}$. «

El siguiente ejemplo muestra otra forma de perder soluciones, al "cancelar" expresiones que se anulan para algún valor de la incógnita.

Ejemplo 93. Cuidado de no dividir por cero.

La propiedad uniforme implica que si $a = b$ entonces $a : c = b : c$ para todo c *permitido* en la división, es decir, siempre que $c \neq 0$. Es por eso que hay que tener cuidado, cuando "pasamos dividiendo" una expresión, de asegurarnos de que esta sea distinta de cero, y considerar aparte el caso que sea cero, para no perder alguna de las soluciones de la ecuación. Para ilustrar esto, consideremos las siguientes ecuaciones:

$$3x - 6 = 8x - 16, \qquad x^3 - x^2 + 2x - 2 = 6x - 6.$$

Una forma de resolver la primera es sacando el número 3 como factor común del miembro izquierdo y el 6 del miembro derecho, para obtener

$$3(x-2) = 6(x-2).$$

Si en la expresión anterior "cancelamos" $(x-2)$, obtenemos $3 = 6$, lo cual no es cierto y podría hacernos pensar que la ecuación no tiene solución. Sin embargo, el error está en que cuando "cancelamos" en realidad estamos utilizando la propiedad uniforme para dividir ambos miembros por $(x-2)$. Al hacer esto, para no dividir por cero debemos pedir que $x \neq 2$. Entonces, **resta considerar el caso $x = 2$**: debemos preguntarnos si este valor es o no solución de la ecuación dada. Para ello reemplazamos por dicho valor en la ecuación original, y vemos que ambos miembros valen cero. Es decir, la igualdad se cumple, y por lo tanto $x = 2$ es solución de la ecuación. Luego, el conjunto solución es $S = \{2\}$.

Lo mismo ocurre con la segunda ecuación, en la que si sacamos factor común x^2 de los dos primeros términos de la izquierda, de los dos restantes sacamos 2 como factor común, y en el miembro derecho sacamos el número 8 como factor común, nos queda

$$x^2(x-1)+2(x-1)=6(x-1).$$

Si sacamos ahora factor común $(x-1)$ del lado izquierdo, la ecuación anterior resulta

$$(x-1)(x^2+2)=6(x-1).$$

Entonces consideramos dos posibilidades: $x=1$ y $x\neq 1$. En este último caso podemos dividir ambos miembros por $(x-1)$, ya que esta cantidad no es cero, y obtenemos

$$x^2+2=6.$$

Esto es equivalente a $x^2=4$, cuyas soluciones son $x=2$ y $x=-2$ (recordar que $\sqrt{x^2}=|x|$). Sin embargo, no debemos olvidarnos de considerar la posibilidad $x=1$, para determinar si este valor forma parte o no de las soluciones. Reemplazando x por dicho valor en la ecuación original se obtiene cero a ambos lados del signo igual, por lo que $x=1$ también es solución. Así, como puede verificarse, $S=\{2,-2,1\}$. «

Ejemplo 94. **La incógnita en el exponente.** Resolver la ecuación $5^{3x-2}=20$.

Solución: Para "bajar" el exponente aplicamos logaritmo a ambos miembros (en este caso en base 5) y luego usamos una de las propiedades del logaritmo (ver página 37) para "cancelar" las operaciones (pues $\log_a(a^x)=x\log_a a=x$):

$$5^{3x-2}=20 \iff \log_5\left(5^{3x-2}\right)=\log_5 20.$$

Puesto que $\log_5 20\approx 1.861$, podemos obtener un valor aproximado de la solución resolviendo la ecuación

$$3x-2=1.861,$$

cuya solución es $x=\frac{3.861}{3}=1.287$. Para verificar que el valor $x=1.287$ aproxima a la solución, reemplazamos en la ecuación para obtener

$$5^{3\cdot 1.287-2}=5^{1.861}\approx 20.$$

Trabajar con aproximaciones numéricas sirve para dar una idea del valor de la solución en problemas concretos. Pero, en este caso, dicha solución puede expresarse de manera exacta como

$$x^*=\frac{2+\log_5 20}{3},$$

de modo que el conjunto solución es $S=\{x^*\}$. «

Ejemplo 95. **La incógnita en el exponente: usando propiedades de la potencia.** Resolver la ecuación $2^x 16^{-x} = (0.5)^{x-8}$.

Solución: Notar que en este caso es posible expresar todas las potencias involucradas en la ecuación en una misma base. Así, la misma puede reescribirse como

$$2^x\left(2^4\right)^{-x} = \left(2^{-1}\right)^{x-8}.$$

Usando las propiedades de la potencia, podemos a su vez reescribirla como

$$2^{x-4x} = 2^{-x+8},$$

es decir,

$$2^{-3x} = 2^{-x+8}.$$

Aplicamos ahora logaritmo a ambos miembros (en este caso en base 2) y luego usamos una de las propiedades del logaritmo para "cancelar" las operaciones:

$$\log_2\left(2^{-3x}\right) = \log_2\left(2^{-x+8}\right) \iff -3x = -x + 8.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $x = -4$. Realicemos la verificación:

$$x = -4: \quad 2^{-4}16^4 = 2^{-4}2^{16} = 2^{12} = 2^{4+8} = (0.5)^{-4-8}. \quad ✔$$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto solución es $S = \{-4\}$. «

Al resolver una ecuación suponemos que x es un valor que satisface la igualdad y, a partir de ello, operamos. Pero suponer que satisface la igualdad implica suponer que las operaciones involucradas en la misma están bien definidas para dicho valor. Esto aquí significa que no genera denominadores nulos, radicandos negativos cuando haya índices pares o logaritmos de un número negativo o cero. En otras palabras, suponemos que x es un valor "permitido" para la ecuación dada. Al momento de resolver una ecuación, es fundamental identificar los valores permitidos, para descartar como solución aquellos que no lo sean. El siguiente ejemplo ilustra el caso de los valores que deben descartarse debido a que generan un denominador nulo.

Ejemplo 96. **Valores no permitidos: generan denominadores nulos.**

Resolver la ecuación $\frac{3x}{x-3} = 1 + \frac{9}{x-3}$.

Solución: Puesto que la expresión $x - 3$ aparece en los denominadores, esto automáticamente descarta a $x = 3$ como solución de la ecuación, pues al reemplazar x por el valor 3, estaríamos dividiendo por cero. Teniendo esto presente, es decir, si $x \neq 3$, resolvamos ahora la ecuación:

$$\frac{3x}{x-3} = 1 + \frac{9}{x-3} \iff 3x = \left(1 + \frac{9}{x-3}\right)(x-3).$$

Aplicando la propiedad distributiva en el miembro derecho se obtiene

$$3x = x - 3 + 9,$$

lo que equivale a $2x = 6$, y por lo tanto $x = 3$. Puesto que este valor era no permitido, se concluye que la ecuación no tiene solución. A diferencia del Ejemplo 93 en el que dividimos por cero, en este caso la estrategia de multiplicar a ambos miembros por $x - 3$ es correcta, solamente que la solución obtenida estaba descartada de antemano. «

☞ El ejemplo anterior muestra cómo se procede cuando se trabaja con ecuaciones que involucran fracciones algebraicas, o cualquier expresión en la cual la incógnita aparece en un denominador: se deben descartar todos los valores de la misma que anulen a alguno de los denominadores dados. En ecuaciones con logaritmos, los valores permitidos para la incógnita son aquellos que no generan, en la ecuación dada, ningún logaritmo de un número negativo o cero. Ilustramos esto en los ejemplos a continuación.

Ejemplo 97. **Ecuaciones con logaritmos.** Resolver la ecuación

$$\log_5(3x) - \log_5(2x+1) = 0.$$

Solución: Los valores permitidos son aquellos x tales que

$$3x > 0 \quad \text{y} \quad 2x + 1 > 0. \qquad (\dagger)$$

Esto significa que los valores de x que no satisfagan alguna de estas dos desigualdades no podrán ser solución de la ecuación, ya que generarían una operación no definida.

Para resolver este tipo de ecuaciones se utilizan las propiedades de los logaritmos:

$$\log_5(3x) - \log_5(2x+1) = \log_5\left(\frac{3x}{2x+1}\right),$$

por lo que la ecuación dada se reescribe como

$$\log_5\left(\frac{3x}{2x+1}\right) = 0.$$

Notar que aquí el denominador $2x + 1$ es distinto de cero, pues requerimos que esta cantidad sea positiva al determinar los valores permitidos para x. Supongamos que existe un valor de x dentro de los permitidos (es decir, que verifica las dos desigualdades en (†)) que satisface la ecuación. Ahora trataremos de hallarlo. De la definición de logaritmo, la última igualdad vale si y solo si

$$5^0 = \frac{3x}{2x+1}.$$

De esta manera, hemos eliminado el logaritmo para obtener la ecuación equivalente

$$1 = \frac{3x}{2x+1},$$

la que, a su vez, equivale a $3x = 2x + 1$, cuya solución es $x = 1$. Notar que este valor satisface las dos desigualdades establecidas al comienzo:

$$3 \cdot 1 > 0 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 1 + 1 > 0,$$

por lo tanto es un valor permitido para la solución. Resta entonces realizar la verificación, para comprobar que es solución de la ecuación:

$$x = 1: \quad \log_5(3 \cdot 1) - \log_5(2 \cdot 1 + 1) = \log_5 3 - \log_5 3 = 0. \quad ✓$$

Luego, el conjunto solución es $S = \{1\}$. «

Ejemplo 98. **Valores no permitidos: generan logaritmos de cantidades no positivas.**

Resolver la ecuación $\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = 2$.

Solución: Los valores permitidos son aquellos x tales que

$$x - 4 > 0 \quad \text{y} \quad x + 4 > 0.$$

Para resolver la ecuación, sea x un valor que satisface la ecuación. Para hallarlo, aplicando la propiedad de la suma de logaritmos de igual base, tenemos que

$$\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = \log_3\left((x-4) \cdot (x+4)\right),$$

por lo que la ecuación dada puede reescribirse como

$$\log_3\left((x-4) \cdot (x+4)\right) = 2.$$

De la definición de logaritmo, esto vale si y solo si

$$(x-4) \cdot (x+4) = 3^2,$$

lo cual es equivalente a

$$x^2 - 16 = 9.$$

Esta última igualdad equivale a $x^2 = 25$, y sabemos que los valores posibles de x que satisfacen esto son $x = 5$ y $x = -5$. Sin embargo, solamente el primero de ellos satisface las dos desigualdades requeridas para los valores permitidos, por lo $x = -5$ se descarta. Reemplacemos entonces en la ecuación para verificar que $x = 5$ es solución:

$$x = 5: \quad \log_3(5-4) + \log_3(5+4) = \log_3 1 + \log_3 9 = 0 + 2 = 2. \quad ✓$$

Luego, el conjunto solución es $S = \{5\}$. «

Para el caso de ecuaciones que involucran radicales con índice par, los valores permitidos para la incógnita son aquellos que no generan radicandos negativos. Se ilustra el modo de resolver ecuaciones de este tipo en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 99. **Valores no permitidos: generan radicales con índice par y radicando negativo.**

Resolver la ecuación $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x-4}$.

Solución: Los valores permitidos son aquellos x tales que

$$x - 3 \geq 0 \quad \text{y} \quad 2x - 4 \geq 0.$$

Para resolver la ecuación, comenzamos elevando ambos miembros al cuadrado para eliminar los radicales, obteniendo la ecuación

$$x - 3 = 2x - 4.$$

Hallemos su solución:

$$x - 3 = 2x - 4 \Longleftrightarrow -3 + 4 = 2x - x,$$

es decir, $x = 1$. Sin embargo, este valor no es permitido ya que no satisface ninguna de las desigualdades requeridas al comienzo (como antes, no satisfacer al menos una de ellas es suficiente para descartarlo). Por lo tanto, no existe ningún número real que sea solución de la ecuación dada, y $S = \varnothing$. «

Con el fin de reforzar todo lo visto hasta aquí, resumimos a continuación los casos en los que se debe tener cuidado:

- **Formas de generar soluciones ficticias:** al elevar al cuadrado (u otra potencia par). Los valores que no resulten solución se detectarán al realizar la verificación. Ver Ejemplo 90.
- **Formas de "perder" soluciones:**
  - al simplificar incorrectamente exponentes e índices pares. Ver Ejemplo 92;
  - al dividir por una expresión y no considerar el caso en que la misma se anule. Ver Ejemplo 93.
- **Valores a descartar:**
  - los que generen denominadores iguales a cero. Ver Ejemplo 96;
  - los que generen logaritmos de cantidades no positivas. Ver Ejemplos 97 y 98;
  - los que generen radicandos negativos. Ver Ejemplo 99.

Algunas ecuaciones pueden ser llevadas a una forma particular: un producto de factores en un miembro, y cero en el otro. Para resolver este tipo de ecuaciones se utiliza una propiedad conocida como **propiedad del producto cero**, la cual establece que:

> Un producto de factores es cero si y solo si uno o más de los factores son iguales a cero.

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de la propiedad del producto cero.

Ejemplo 100. **Un producto igual a cero.** Resolver la ecuación

$$(x-2)(x^3-1)=0.$$

Solución: Por la propiedad del producto cero, sabemos que la ecuación se satisface si y solo si uno o ambos factores son cero. Es decir

$$x-2=0 \qquad \text{o} \qquad x^3-1=0.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene

$$x=2 \qquad \text{o} \qquad x=\sqrt[3]{1}=1.$$

Luego, tenemos que $S=\{2,1\}$. Se puede ver en la ecuación original que cualquiera de estos dos valores anulan el miembro izquierdo. «

Ejemplo 101. Resolver la ecuación $x^4-x^3+x^2-3x=6$.

Solución: La ecuación dada es equivalente a $x^4-x^3+x^2-3x-6=0$. Factorizando el polinomio que aparece a la izquierda, la ecuación se transforma en

$$(x-2)(x+1)(x^2+3)=0.$$

Por la propiedad del producto cero, sabemos que la ecuación se satisface si y solo si alguno de los factores es cero. Es decir

$$x-2=0, \qquad x+1=0 \qquad \text{o} \qquad x^2+3=0.$$

La última opción no es posible ya que $x^2+3\geq 0+3=3>0$, por lo que solamente pueden valer las dos primeras. Resolviendo estas dos ecuaciones se obtiene

$$x=2 \qquad \text{o} \qquad x=-1.$$

Entonces $S=\{2,-1\}$. Se puede ver en la ecuación original que cualquiera de estos dos valores hacen que el miembro izquierdo valga 6. «

Ejemplo 102. **Descartando soluciones ficticias.**

Hallar los valores de x que satisfacen la igualdad $x+4=\sqrt{x+10}$.

Solución: Los valores permitidos para x son aquellos tales que $x+10\geq 0$, pues si el índice es par entonces el radicando no puede ser negativo. Para resolver la ecuación, elevamos ambos miembros al cuadrado para eliminar el radical, y obtenemos:

$$(x+4)^2=x+10.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}(x+4)^2=x+10 &\iff x^2+8x+16=x+10\\ &\iff x^2+7x+6=0.\end{aligned}$$

Aplicando la regla de Ruffini, el polinomio que aparece en el miembro izquierdo puede factorizarse como $(x+1)(x+6)$, por lo que la ecuación se transforma en

$$(x+1)(x+6)=0.$$

Por la propiedad del producto cero, las soluciones son $x=-1$ y $x=-6$. Ambos valores son permitidos, pues ninguno genera radicando negativo en la ecuación original. Sin embargo, puesto que hemos elevado al cuadrado para resolver, pudimos haber introducido una solución ficticia. Para determinar esto, debemos verificar la validez de la ecuación original con cada valor obtenido. A continuación calculamos el valor de ambos miembros de la ecuación dada para cada uno de los valores obtenidos, para determinar si se cumple la igualdad o no:

	$x+4$	$\sqrt{x+10}$	
$x=-1$	$-1+4=3$	$\sqrt{-1+10}=3$,	✓
$x=-6$	$-6+4=-2$	$\sqrt{-6+10}=2$.	✗

Por lo tanto, el conjunto solución es $S=\{-1\}$. «

Como consecuencia de la propiedad del producto cero se obtiene la del **cociente cero**:

> Un cociente es cero si y solo si el numerador es cero
> (y el denominador distinto de cero).

Ejemplo 103. **Un cociente igual a cero.** Resolver la ecuación

$$\frac{x^2+3x-18}{x^2+1}=0.$$

Solución: Observemos primero que el denominador que aparece en la ecuación nunca es cero, ya que $x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0$. Por la propiedad del cociente cero, sabemos que la ecuación se satisface si y solo si el numerador es cero. Es decir, la ecuación se transforma en

$$x^2 + 3x - 18 = 0.$$

Para resolver esta ecuación[*] aplicamos la regla de Ruffini para factorizar el polinomio del miembro izquierdo como $x^2 + 3x - 18 = (x + 6)(x - 3)$. Por lo tanto, la ecuación que debemos resolver es

$$(x + 6)(x - 3) = 0.$$

Aplicando ahora la propiedad del producto cero sabemos que las posibilidades son

$$x + 6 = 0 \qquad \text{o} \qquad x - 3 = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $x = -6$ y $x = 3$. Puesto que ninguno de estos valores anula al denominador ya que, como dijimos al principio, este nunca se anula, ambos están permitidos. Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{-6, 3\}$. «

Para resolver ecuaciones en GeoGebra se dispone del comando Resuelve, donde se coloca entre paréntesis la ecuación en la cual la incógnita siempre debe llamarse x. Otra opción es ingresar la ecuación tal como aparece en el campo de entradas, y aparecerá un botón que dice RESUELVE. La salida será una o más líneas verticales indicando el o los valores de la solución. Si la ecuación es polinómica se indicará también una lista con las soluciones.

Ejercicios 4.2

1. Resolver los problemas planteados en los Ejemplos 82 y 83, de la página 98.

2. Resolver los problemas planteados en los Ejercicios 1 a 5 de la Sección 4.1.

3–24. Resolver las ecuaciones. Recordar que se debe expresar la solución y realizar la verificación (analizar antes cuáles son los valores permitidos).

3. $2(x + 3) - 5(-2x + 1) = 2x - 19$

4. $\frac{x}{4} + 3 - 2x = -11$

5. $-2 = \sqrt[3]{y - 7}$

6. $\frac{3x-1}{2} + \frac{4-2x}{3} = x + 3$

[*]En la sección siguiente veremos una fórmula para resolver este tipo de ecuaciones.

7. $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{5-x} = 0$

8. $-2 + |t - 3| = 6$

9. $|1 + 5x| = -9$

10. $\big||5 - 2x| - 8\big| = 3$

11. $\left|\frac{x-3}{x+2}\right| = 2$

12. $\sqrt{x - 2} = 1 + \sqrt{x - 4}$

13. $3^{2x-1} = 81$

14. $5^x \cdot 25^x = 125$

15. $\sqrt[2-x]{25^{\frac{2x+1}{2}}} = \frac{1}{5}$

16. $2^{3x} = (0.5)^{3x+2}$

17. $\sqrt[3x]{\sqrt[3]{\sqrt[3x]{9}}} = 3^{2x}$

18. $\log(x + 1) + \log 5 = \log(x - 3)$

19. $\log_3(2x - 5)^4 = 8$

20. $\log_9(x + 1) + \log_9 9(x + 1) = 2$

21. $\log_x 81 - 2\log_x 3 = 2$

22. $\log_2 x + \log_2(x + 6) = 4$

23. $\ln(x + 8) = \ln x + \ln 8$

24. $\log\sqrt{8x + 2} - \log\sqrt{x - 4} = 1 - \log 2$

25. Factorizar para resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

(**a**) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = 0$

(**b**) $2x^5 + 2x^4 - 16x^3 - 24x^2 = 0$

(**c**) $x^6 - 25x^4 + x^2 = 25$

(**d**) $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 = x^3 + x - 2$

(**e**) $x^3 + 5x^2 + x = 3x^2 + 16x + 36$

26. Ingresar las ecuaciones polinómicas del ejercicio anterior en el campo de entradas de GeoGebra para comparar con los resultados obtenidos.

27. Cintia quiere ser cantante. Tiene un contrato discográfico que le paga una tarifa base de \$4000 pesos mensuales y \$120 por cada disco que vende. El mes pasado ganó un total de \$8440. Escribir una ecuación que determine el número de discos que vendió Cintia el último mes, y resolverla.

28. Al multiplicar un cierto número por 81, este aumenta en 154000 unidades. ¿Cuál es dicho número?

29. La suma de tres números impares consecutivos es igual a 99. Hallar la suma de los dos números mayores.

30. Hay 3400 personas en un estadio. Se observa que por cada 10 visitantes había 24 locales. ¿Cuántos locales asistieron?

31. La suma de las edades de 4 amigos es 46. José y Franco tienen la misma edad. Francisco supera en 3 años a la mitad de la edad de cada uno de ellos, mientras que Luciano tiene 4 años más que Francisco. Determinar la edad de cada uno.

4.3. Ecuaciones de segundo grado

En esta sección veremos cómo resolver una **ecuación de segundo grado** (también llamada **cuadrática**), la cual es una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$, y x es la incógnita. Es decir, es un polinomio de grado 2 igualado a cero. Aquí a es llamado **coeficiente cuadrático**, b el **coeficiente lineal** y c es el **término independiente**.

Notar que pedimos el coeficiente cuadrático a distinto de cero para que efectivamente sea un polinomio de grado 2, ya que si $a = 0$ entonces la ecuación es $bx + c = 0$, la cual deja de ser cuadrática. Si $b \neq 0$, la solución de esta ecuación lineal es $x = -\frac{c}{b}$.

Sin embargo, los coeficientes b o c pueden ser cero. Si esto ocurre, es decir, si al menos uno de ellos es cero, entonces la ecuación cuadrática es sencilla de resolver, aplicando las herramientas dadas en la sección anterior. Analizaremos estos casos en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 104. Coeficiente lineal $b = 0$. Supongamos que tenemos la ecuación

$$2x^2 - 8 = 0.$$

Esta ecuación se resuelve en forma directa con lo aprendido en la sección anterior, simplemente despejando x de la forma usual:

$$2x^2 - 8 = 0 \iff 2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

Luego, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{2, -2\}$. Notar que el mismo conjunto es solución de

$$-2x^2 + 8 = 0.$$

Sin embargo, veamos qué ocurre si la ecuación fuese

$$2x^2 + 8 = 0.$$

En este caso, con los mismos pasos anteriores obtenemos

$$x^2 = -4,$$

cuya solución no existe en los reales pues ningún número real elevado al cuadrado da como resultado un número negativo. Lo mismo ocurre si tenemos la ecuación

$$-2x^2 - 8 = 0.$$

«

El ejemplo anterior se escribe en forma general como sigue.

> La ecuación cuadrática $ax^2 + c = 0$ tiene solución real si y solo si $a \cdot c \geq 0$ (es decir, o bien a y c tienen el mismo signo, o bien $c = 0$), y en tal caso el conjunto solución es $S = \left\{\pm\sqrt{\frac{c}{a}}\right\}$.

Ejemplo 105. **Término independiente $c = 0$.** Supongamos que tenemos la ecuación

$$5x^2 - 3x = 0.$$

Entonces podemos factorizar el miembro izquierdo, extrayendo a x como factor común:

$$x(5x - 3) = 0.$$

Por la propiedad del producto cero, sabemos que esto ocurre si y solo si

$$x = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 5x - 3 = 0.$$

Despejando x en la última igualdad obtenemos que el conjunto solución de la ecuación dada es $S = \left\{0, \frac{3}{5}\right\}$. «

En forma general, factorizando $ax^2 + bx = x(ax + b)$ tenemos que:

> El conjunto solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx = 0$ es $S = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$. Si $b = 0$, el conjunto solución se reduce a $S = \{0\}$.

Entonces solamente resta ver cómo resolver ecuaciones de segundo grado en las que el polinomio involucrado es completo, es decir, con todos los coeficientes distintos de cero:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con a, b y c no nulos. Para resolverla, usaremos una técnica que se conoce como **completar cuadrados**, que consiste en sumar y restar una cantidad adecuada, de manera de hacer aparecer un trinomio cuadrado perfecto. Al sumar y restar una misma cantidad en uno de los miembros, no estamos alterando la ecuación, pues lo que agregamos en total es cero.

Recordemos que un **trinomio cuadrado perfecto** (abreviado **t.c.p.**) es un polinomio de tres términos que resulta de elevar al cuadrado un binomio (ver página 65). En particular, consideremos el que se obtiene de elevar al cuadrado el binomio $x + r$, para algún r real:

$$(x + r)^2 = x^2 + 2rx + r^2.$$

Queremos sumar (y luego restar) una cantidad adecuada, para que aparezca en la ecuación original algo que tenga la "forma" del trinomio anterior. Esta forma puede describirse como sigue: el término independiente (r^2) es el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal ($2r$), mientras que el coeficiente cuadrático es 1. Antes de hacerlo en forma general, veamos un ejemplo para aclarar esta frase.

Ejemplo 106. **Completando cuadrados.** Consideremos la ecuación

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

En este caso el coeficiente lineal es -6, su mitad es -3, y $(-3)^2 = 9$, que no coincide con el término independiente que es 5. El truco consiste en hacer aparecer dicho 9, pero, para no afectar el resultado de la ecuación, así como lo sumamos también lo restamos:

$$x^2 - 6x + 5 = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{\text{t.c.p.}} - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$(x - 3)^2 - 4 = 0 \quad \iff \quad (x - 3)^2 = 4 \quad \iff \quad x - 3 = \pm 2,$$

lo que produce las opciones $x_1 = 2 + 3 = 5$ y $x_2 = -2 + 3 = 1$ (se utiliza la notación x_1 y x_2 para indicar dos valores diferentes para las soluciones). Es decir, el conjunto solución es $S = \{5, 1\}$. Puede verse fácilmente que estos dos valores satisfacen la ecuación original:

$$5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0 \qquad \text{y} \qquad 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0.$$ ✔ «

Notar que en el ejemplo anterior el signo del binomio viene dado por el signo del coeficiente lineal, es decir, el trinomio proviene de resolver $(x+r)^2$, siendo r la mitad del coeficiente lineal, que puede ser negativo o positivo.

Ejemplo 107. Resolver la ecuación cuadrática $2x^2 + 4x - 1 = 0$ utilizando el método de completar cuadrados.

Solución: A diferencia del ejemplo anterior, el coeficiente cuadrático no es 1. Entonces, el primer paso en este caso es extraer dicho coeficiente como factor común, para luego completar cuadrados en lo obtenido:

$$2x^2 + 4x - 1 = 2\left(x^2 + 2x - \tfrac{1}{2}\right) = 2\Big(\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{t.c.p.}} - 1 - \tfrac{1}{2}\Big)$$

$$= 2\left((x+1)^2 - \tfrac{3}{2}\right) = \; 2(x+1)^2 - 3.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$2(x+1)^2 - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+1)^2 = \tfrac{3}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x + 1 = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

lo que implica $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - 1$. «

Cuando el coeficiente cuadrático no es igual a 1, este debe extraerse como factor común. En el ejemplo anterior lo tomamos como factor común de los tres términos, pero también podríamos haberlo tomado solamente de los dos que poseen x:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 1 &= 2\left(x^2 + 2x\right) - 1 \\ &= 2\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) - 1 \\ &= 2\left(x^2 + 2x + 1\right) - 2 - 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 3. \end{aligned}$$

Hacerlo de esta manera evitó incluir fracciones innecesarias. La única precaución que debemos tener es que cuando llevamos el $-r^2$ fuera del paréntesis (en este caso es -1), no hay que olvidar que está multiplicado por el factor común (que en este caso es 2).

No toda ecuación cuadrática tiene siempre dos soluciones reales. Como puede verse en los siguientes ejemplos, puede ocurrir también que tenga una única solución, o incluso que no tenga ninguna.

Ejemplo 108. **Una ecuación cuadrática con solución única.** Completar cuadrados para resolver la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Solución: En este caso el coeficiente lineal es -2, su mitad es -1 y $(-1)^2 = 1$, lo cual coincide con el término independiente. Esto significa que el polinomio del miembro izquierdo ya es un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$(x-1)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-1| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$$

Puede verificarse que reemplazando x por 1 en el miembro izquierdo de la ecuación original se obtiene cero como resultado, por lo que $S = \{1\}$. «

Ejemplo 109. **Una ecuación cuadrática sin solución.** Resolver la ecuación cua-drática $x^2 - 2x + 3 = 0$ utilizando el método de completar cuadrados.

Solución: Aquí, al igual que en el ejemplo anterior, el coeficiente lineal es -2, y el cuadrado de su mitad es 1, lo cual no coincide con su término independiente 3. Entonces, al sumar y restar 1 se obtiene

$$x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + 3 = (x-1)^2 + 2.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$(x-1)^2 + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 = -2.$$

La última ecuación no tiene solución, ya que ningún número real elevado al cuadrado puede dar como resultado un número negativo. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. «

Siguiendo las mismas ideas de los ejemplos anteriores, consideremos ahora el caso general

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con a no nulo. Completemos cuadrados:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right) = a\Big(\underbrace{x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2}_{\text{t.c.p.}} - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a}\Big)$$

$$= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \tfrac{b^2}{4a} = a(x-h)^2 + k,$$

con $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = c - \frac{b^2}{4a}$ (esta forma de expresar un polinomio cuadrático se retomará en el Capítulo 5). Luego, la ecuación original se transforma en

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros (recordar la propiedad (2.3.3)) y resolviendo, obtenemos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La fórmula anterior se llama **resolvente** y se aplica para hallar, si existen, las soluciones reales de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Si el radicando que aparece en la fórmula es negativo, entonces la ecuación no tendrá soluciones reales. Si es cero, tendrá una única solución (llamada **solución doble**), y si es positivo entonces la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas x_1 y x_2 dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El radicando se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática y se denota como

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Como mencionamos, será suficiente con calcular el valor del discriminante para saber la cantidad de soluciones de una ecuación cuadrática:

- $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas;
- $\Delta = 0$: una solución (llamada doble);
- $\Delta < 0$: sin soluciones reales.

Lo anterior justifica el "criterio de parada" para la factorización de polinomios cuadráticos, enunciado en la página 84.

Ejemplo 110. **Aplicando la resolvente.** Hallar las soluciones de la ecuación

$$2x^2 + 4x - 6 = 0.$$

Solución: Debemos resolver una ecuación cuadrática en la que $a = 2$, $b = 4$ y $c = -6$. Aplicando la resolvente con estos valores tenemos

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4},$$

de lo que se obtiene $x_1 = \frac{-4+8}{4} = 1$ y $x_2 = \frac{-4-8}{4} = -3$. Luego, $S = \{1, -3\}$. «

Ejemplo 111. Resolver la ecuación $\log_7(2x) - \log_7(x^2 - 8) = 0$.

Solución: Los valores permitidos para x son aquellos tales que

$$2x > 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 8 > 0,$$

ya que el logaritmo de números negativos no está definido.

Para resolver la ecuación, comenzamos aplicando la propiedad de la resta de dos logaritmos con igual base para transformar la ecuación en

$$\log_7\left(\frac{2x}{x^2-8}\right) = 0.$$

Por definición de logaritmo, esto es equivalente a

$$7^0 = \frac{2x}{x^2-8},$$

con lo que eliminamos el logaritmo, y ahora debemos resolver esta última ecuación:

$$1 = \frac{2x}{x^2-8} \iff x^2 - 8 = 2x \iff x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Resolvemos ahora esta ecuación cuadrática usando la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2},$$

lo que lleva a $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$. Sin embargo, $x = -2$ no formará parte del conjunto solución, ya que no satisface las desigualdades que definen a los valores permitidos (en este caso no satisface ninguna de las dos, pero no satisfacer alguna de ellas es suficiente para descartar dicho valor). Para verificar que $x = 4$ es solución de la ecuación original, reemplazamos para obtener:

$$x = 4: \quad \log_7(2 \cdot 4) - \log_7(4^2 - 8) = \log_7(8) - \log_7(8) = 0. \quad ✓$$

Luego, la única solución es $x = 4$, es decir, $S = \{4\}$. «

El siguiente ejemplo muestra que a veces algunas soluciones de la ecuación deben ser descartadas como soluciones de un problema concreto. Esto se debe a que, si bien la ecuación modela el problema, por el contexto del mismo algunos valores no son permitidos.

Ejemplo 112. Soluciones descartadas debido al contexto.

Hallar la longitud de la base de un triángulo que tiene un área de 24 cm^2, y cuya altura mide 2 cm más que la base correspondiente.

Solución: Llamemos x a la longitud de la base (en centímetros). Entonces la altura mide $x + 2$ cm. Sabemos que

$$24 = \text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{x(x+2)}{2}.$$

Es decir $48 = x(x+2)$, o equivalentemente,

$$0 = x^2 + 2x - 48.$$

Aplicando la resolvente se obtienen dos soluciones para esta ecuación: $x_1 = 6$ y $x_2 = -8$. Sin embargo, como x representa una longitud, la solución negativa queda descartada. Entonces la única solución posible para el problema es que la longitud de la base sea 6 cm. «

Ejemplo 113. **Usando el discriminante.** Utilizar el discriminante para determinar la cantidad de soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

(**a**) $4x^2 + 2x + 3 = 0$, (**b**) $-x^2 - x + 12 = 0$, (**c**) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Solución: Calculemos el discriminante de cada ecuación:

(**a**) $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -44$,

(**b**) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49$,

(**c**) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$.

De esto podemos concluir que la ecuación (**a**) no tiene soluciones reales, la (**b**) tiene dos soluciones reales distintas, mientras que la (**c**) tiene solución única. «

Si bien la resolvente es una fórmula muy útil para hallar soluciones de una ecuación cuadrática, manejar el procedimiento de completar cuadrados resultará fundamental para conocer la apariencia de las funciones cuadráticas, que serán estudiadas en el capítulo siguiente.

Recordemos que el teorema del resto afirma que si r es un número real y p es un polinomio de grado al menos 1, entonces el resto de dividir p por $(x - r)$ es $p(r)$, es decir, el resto es el valor que se obtiene al hallar el valor numérico de p en r. Como consecuencia directa de esto, el teorema del factor afirma que el binomio $(x - r)$ es factor del polinomio p si y solo si $p(r) = 0$. Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio de grado 2, y sean x_1 y x_2 dos soluciones reales (distintas o iguales) de la ecuación $p(x) = 0$ obtenidas mediante la resolvente. Es decir que

$$p(x_1) = 0 \qquad \text{y} \qquad p(x_2) = 0,$$

o equivalentemente, x_1 y x_2 son raíces de p (esto significa que estamos en el caso $\Delta \geq 0$). Luego, tanto $(x - x_1)$ como $(x - x_2)$ son factores de p. Más precisamente, se tiene que p se factoriza como:

$$\boxed{p(x) = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

Ejemplo 114. Factorizando un polinomio cuadrático. Utilizar la resolvente para factorizar los polinomios

$$p(x) = x^2 + x - 6 \qquad \text{y} \qquad q(x) = 2x^2 - 20 - 6x.$$

Una vez obtenida la factorización, verificar que es correcta resolviendo el producto para recuperar los polinomios dados.

Solución: Comencemos aplicando la resolvente para hallar las soluciones de $p(x) = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

de lo que se infiere $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$. Entonces, podemos factorizar p como

$$p(x) = (x - 2)(x + 3).$$

Para verificar, hacemos la distributiva y operamos:

$$(x - 2)(x + 3) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6 = p(x). \quad ✓$$

Con respecto a q, tenemos

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-20)}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm 14}{4},$$

lo que implica $x_1 = 5$ y $x_2 = -2$. Por lo tanto q se factoriza como

$$q(x) = 2(x - 5)(x + 2).$$

Realicemos la verificación:

$$2(x-5)(x+2) = 2(x^2+2x-5x-10) = 2(x^2-3x-10) = 2x^2-6x-20 = q(x), \quad ✓$$

por lo que la factorización obtenida es correcta. «

⚠ Un error frecuente es olvidar el número a en la factorización anterior, y escribir

$$q(x) = (x - 5)(x + 2). \quad ✗$$

Ejercicios 4.3

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 + 2 = 38$

(b) $x^2 + 4 = 0$

(c) $2x^2 - 4x = 0$

(d) $\frac{x^2-x}{x^2+1} = 0$

(e) $\frac{x^2-x}{x-1} = 0$

2. Hallar el valor de c tal que $x^2 - 8x + c$ es un trinomio cuadrado perfecto.

3. Completar cuadrados para llevar cada polinomio a la forma $a(x-h)^2 + k$. Verificar.

(a) $x^2 + 5 - 2x$

(b) $x^2 + 4x + 1$

(c) $-2x^2 - x + 1$

4. Completar cuadrados para resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 + x - 6 = 0$

(b) $2x^2 + 8x + 8 = 0$

(c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

(d) $x^2 - 4 - 3x = 0$

5. Hallar, si es posible, las soluciones de las siguientes ecuaciones aplicando la resolvente:

(a) $2x^2 + 50 + 20x = 0$

(b) $x^2 + 3x - 4 = 0$

(c) $x^2 + 6x + 13 = 0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x(3x-2) = x^2 - 5x$

(b) $4 - 3x - x^2 = (3x-2)^2 - 1$

(c) $\frac{x^2+2x-3}{3x+2} = 0$

(d) $\frac{x^2+2x-3}{x-1} = 0$

(e) $\sqrt{2x-1} = x - 2$. *Advertencia:* recordar que al elevar al cuadrado se pueden introducir soluciones ficticias.

(f) $3\sqrt{2x-1} = 3x$

(g) $\sqrt{x^2 + 6x} = x + \sqrt{2x}$. *Sugerencia:* elevar al cuadrado dos veces para eliminar por completo las raíces y luego factorizar para aplicar la propiedad del producto cero.

(h) $3\log_2(x) - \log_2(x+1) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$

7. Usar el discriminante para determinar cantidad de soluciones de las siguientes ecuaciones:

(a) $2x^2 - 2x - 24 = 0$

(b) $-x^2 - 5 + 2x = 0$

(c) $-x^2 - 4x - 4 = 0$

8. Determinar el valor de a de modo que la ecuación $ax^2 - 24x + 9 = 0$ tenga una raíz doble.

9. Utilizar la resolvente para factorizar los polinomios dados a continuación:

(a) $p(x) = x^2 + 6x + 8$

(b) $q(x) = 3x^2 + 3x - 6$

(c) $r(x) = x^2 + 2x - 63$

10. La altura de un triángulo es 2 cm menor que la longitud de la base, y su área es de 684 cm^2. ¿Cuáles son las medidas de la base y de la altura de dicho triángulo?

11. Encontrar un número natural tal que dos veces su cuadrado exceda al propio número en 120.

12. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 113. Encontrar dichos números.

13. La suma de los cuadrados de dos números naturales *pares* consecutivos es 100. Encontrar dichos números.

14. Encontrar dos números naturales *impares* consecutivos tales que su producto sea igual a 195.

15. Un joven empleado, interrogado acerca de su edad respondió: “El doble del cuadrado de la edad que tendré dentro de cuatro años, menos el triple del cuadrado de la edad que tenía hace dos años, es el doble de la edad que tendré dentro de 54 años”. Determinar la edad del joven empleado al momento de responder la pregunta.