Respuestas al Práctico 1: Operaciones

Ejercicio 1 *Encontrar el resultado o expresar en forma reducida cada uno de los siguientes números.*

1. $2+3\times 4-((-3)2+4-3\times 5)=31$
2. $4(3-5)-3^2 2^3+7\sqrt{25}=-45$
3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$
4. $4\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$
5. $\frac{-3}{5}\left(\frac{2}{3}-1\right)-\frac{4}{3}=-\frac{17}{15}$
6. $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$
7. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}=\frac{6}{13}$
8. $\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)=-\frac{17}{12}$
9. $\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{7^3}{15^3}$
10. $\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{2^8}{3^{10}}$
11. $\left(\frac{1/3}{2/5}\right)^{-2}=\frac{36}{25}$
12. $\frac{7^{\frac{3}{2}}}{7^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{7}$
13. $3!+\frac{1}{3!}=\frac{37}{6}$
14. $\frac{5!}{2!+3!}=15$
15. $\frac{6!}{2!3!}=60$

Ejercicio 2 *Calcular simplificando la respuesta lo más posible. Expresar el resultado como una sola fracción reducida.*

1. $\frac{3}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{11}{15}$
2. $\frac{3}{5}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{2}=2$
3. $\frac{1+\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}-1}=-10$
4. $\frac{3}{4(x+1)}-\frac{7}{2(x-1)}=-\frac{11x+17}{4(x-1)(x+1)}=-\frac{11x+17}{4(x^2-1)}$
5. $\frac{x^2-4}{x+1}/\frac{x+2}{3x-5}=\frac{(x-2)(3x-5)}{x+1}$
6. $\frac{xy}{yz}-\frac{y}{z}=\frac{x-y}{z}$
7. $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)}$
8. $\frac{x}{yz}+\frac{y}{z}=\frac{x+y^2}{yz}$
9. $\frac{3x}{5y}+\frac{4x}{2y^2}=\frac{6xy+20x}{10y^2}=\frac{x(3y+10)}{5y^2}$
10. $\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}}=\frac{x^2+yx}{xy-y^2}$
11. $\frac{x+\frac{y}{z}}{\frac{y}{z}-z}=\frac{xz+y}{y-z^2}$
12. $\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{xy^2}{z}\right)^4=\frac{x^7y^5}{z^4}$

Ejercicio 3 *Simplificar los siguientes radicales (se asumen, a,b,x,y positivos)*

1. $\sqrt{32}\sqrt{2}=8$
2. $\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$
3. $10\sqrt[3]{5^2}=2\times 5^{5/3}=2\sqrt[3]{5^5}$
4. $\sqrt{\frac{243}{125}}=\frac{9\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$
5. $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}=5$
6. $\frac{\sqrt[6]{4^5}}{\sqrt[6]{9^3}}=\frac{4^{5/6}}{3}$
7. $\frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{54}}=-\frac{1}{3}$
8. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=x^{-4/3}$
9. $\frac{\sqrt[4]{32x^4}}{\sqrt[4]{2}}=2x$
10. $\sqrt{xy}\sqrt{x^3y}=x^2y$
11. $\sqrt{16a^4b^3}=4a^2b\sqrt{b}$
12. $\frac{\sqrt[5]{96a^6}}{\sqrt[5]{3a}}=2a$

Ejercicio 4 *Calcular:*

1. $\sqrt{112} - 2\sqrt{63} + \frac{3}{5}\sqrt{175} = \sqrt{7}$
2. $\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[6]{2}}{2^4\sqrt[3]{8}} + \frac{2^5}{4^2} = 2^{-49/12} + 2$
3. $2\sqrt{25} - \sqrt[4]{16} + 3\sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{-8} = 16$

Ejercicio 5 *Simplificar las siguientes expresiones (se asumen, a, b, x, y, z positivos):*

1. $a^2b^{-2}a^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{b^4}(b^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{3}}b^{-5}$
2. $\frac{a^{-3}b^3a^4}{a^{-2}a^5b^3} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$
3. $\frac{x^2y^{-\frac{5}{4}}z^3}{y^{-2}z^4x} = \frac{xy^{3/4}}{z}$

Ejercicio 6 *Factorizar las siguientes expresiones:*

1. $2x + 12x^3 = 2\,x\,\left(6\,x^2 + 1\right)$
2. $5ab - 8abc = (-8\,c + 5)\,\,b\,a$
3. $x^2 + 7x + 6 = (x + 1)\,\,(x + 6)$
4. $x^2 - x - 6 = (x - 3)\,\,(x + 2)$
5. $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)\,\,(x + 2)$
6. $2x^2 + 7x - 4 = (x + 4)\,\,(2\,x - 1) = 2\,(x + 4)\,\,(2\,x - 1/2)$
7. $9x^2 - 36 = 9\,\,(x - 2)\,\,(x + 2)$
8. $8x^2 + 10x + 3 = (2\,x + 1)\,\,(4\,x + 3) = 8\,(x + 1/2)\,\,(x + 3/4)$
9. $6x^2 - 5x - 6 = (2\,x - 3)\,\,(3\,x + 2) = 6\,(x - 3/2)\,\,(x + 2/3)$
10. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
11. $t^3 + 1 = (t + 1)\,\,\left(t^2 - t + 1\right)$
12. $4t^2 - 9s^2 = -(3\,s - 2\,t)\,\,(3\,s + 2\,t)$
13. $4t^2 - 12t + 9 = (2\,t - 3)^2$
14. $x^3 - 27 = (x - 3)\,\,\left(x^2 + 3\,x + 9\right)$
15. $x^3 + 2x^2 + x = \,x\,\,(x + 1)^2$
16. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 2)\,\,(x - 1)^2$
17. $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)\,\,(x + 1)\,\,(x + 3)$
18. $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = (x - 4)\,\,(x - 3)\,\,(x + 5)$
19. $2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = (x - 1)\,\,(x + 4)\,\,(2\,x + 1) = 2\,(x - 1)\,\,(x + 4)\,\,(x + 1/2)$
20. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 3)\,\,(x - 2)\,\,(x + 2)$

Ejercicio 7

1. *Expresar en forma logarítmica las siguientes expresiones:*

   a) $5^3 = 125 \Leftrightarrow \log_5 125 = 3$
   b) $3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$
   c) $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$

2. *Hallar* $\log(32)$ *en base 4 y* $\log(1/81)$ *en base 27.*

   - $\log_4 32 = \log_4(2^5) = \frac{5}{2}$
   - $\log_{27}(\frac{1}{81}) = \log_{27}(3^{-4}) = \frac{-4}{3}$

3. *Expresar* $\log(75/16) - 2\log(5/9) + \log(32/243)$ *en términos de* $\log(2)$ *y* $\log(3)$.

- $\log(75/16) - 2\log(5/9) + \log(32/243) =$
  $\log(\frac{3\times 5^2}{2^4}) + \log(\frac{9}{5})^2 + \log(\frac{2}{3})^5 =$
  $2\log 5 + \log 3 - 4\log 2 + 4\log 3 - 2\log 5 + 5\log 2 - 5\log 3 = \log 2$

4. *¿Se cumple que* $2\log(15/18) - \log(25/162) + \log(4/9) = \log(2)$*? R: Sí, se cumple.*

- $2\log(15/18) - \log(25/162) + \log(4/9) =$
  $2\log(\frac{3\times 5}{3\times 3\times 2}) - \log(\frac{5^2}{2\times 3^4}) + \log(\frac{2^2}{3^2}) =$
  $2\log 5 - 2\log 2 - 2\log 3 - 2\log 5 + \log 2 + 4\log 3 + 2\log 2 - 2\log 3 = \log 2$

Ejercicio 8 *Simplificar las siguientes expresiones:*

1. $\log_2 16 + \log_2 32 = \log_2(2^4) + \log_2(2^5) = 4\log_2 2 + 5\log_2 2 = 9$
2. $\log_3 81 - \log_3 9 = \log_3(3^4) - \log_3(3^2) = 4\log_3 3 - 2\log_3 3 = 2$
3. $\log_2(1/8) - \log_3(1/9) = \log_2(2^{-3}) - log_3(3^{-2}) = -3\log_2 2 + 2\log_3 3 = -1$
4. $\log_3 729 - 2\log_3 3^3 + \log_4 2 = \log_3(3^6) - 6\log_3 3 + \log_4 2 = 6\log_3 3 - 6\log_3 3 + \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{1}{2}$
5. $\frac{1}{2}\log_2 48 - \frac{2}{3}\log_3 27^9 = \frac{1}{2}\log_2(3\times 2^4) - \frac{2}{3}\log_3(3^3)^9 =$
   $= \frac{1}{2}\log_2 3 + 2\log_2 2 - \frac{2}{3}27\log_3 3 = \frac{1}{2}\log_2 3 - 16 = \frac{1}{2}\log_2(\frac{3}{2^{32}})$
6. $\log_6 24 + 2\log_6 3 = \log_6(6\times 2^2) + \log_6(3^2) = \log_6 6 + 2(log_6 2 + \log_6 3) = 3$

Ejercicio 9 *Escribir en términos de un único logaritmo:*

1. $3\ln(x) + \frac{1}{3}\ln(x+2) = \ln(x^3) + \ln(\sqrt[3]{x+2}) = \ln(x^3\sqrt[3]{x+2})$
2. $-3\ln(x) + 4\ln(y) + 5\ln(z) = \ln(\frac{y^4 z^5}{x^3})$
3. $5\ln(x+1) + 2\ln(x^3) - \ln(x) = \ln\left((x+1)^5 x^5\right) = 5\ln((x+1)x)$
4. $\ln(\sqrt{8x+2}) - \ln(\sqrt{4-x}) + \ln(2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4(8x+2)}{(4-x)}\right)$
5. $\log_3(a^2) + \log_3(9) - 5\log_3(x) = \log_3\frac{(3a)^2}{x^5}$
6. $\ln(x+8) - \ln(x) - \ln(8) = \ln\frac{x+8}{8x}$
7. $\log_3(2x^{-1}) + \log_3(12x^5) + \log_3(\frac{2}{3}x^{-3}) = \log_3 16x$
8. $\log(4y^3) + \log(5y^4) - \log(2y^5) = \log(10y^2) = 1 + 2\log y$

Ejercicio 10 1. *Si* $p = e^x$ *y* $q = e^y$ *expresar* e^{2y-3x} *en función de* p *y de* q*.*

- $e^{2y-3x} = \frac{(e^y)^2}{(e^x)^3} = \frac{q^2}{p^3}$

2. *Si* $\ln(a) = 2$ *y* $\ln(b) = 4$*, calcular* $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)$.

- $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right) = -\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = -3$

3. Expandir las siguientes experesiones: a) $\log(24(k+2)^3)$, *b)* $\log_3\left(\frac{243y^2}{\sqrt{2}}\right)$

a) $\log(24(k+2)^3) = \log 24 + 3\log(k+2)$

b) $\log_3\left(\frac{243y^2}{\sqrt{2}}\right) = \log_3 3^5 + 2\log_3 y - \frac{1}{2}\log_3 2 = 5 - \frac{1}{2}\log_3 2 + 2\log_3 y$