Clase del jueves 10/6

Ejercicio 4 práctico Clasificación binaria.

Población 1 $\quad \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, I\right) \leftarrow f_1$

Población 2 $\quad \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, I\right) \leftarrow f_2$.

Clasificador de Bayes es el que maximiza la probabilidad a posteriori.

$$P(Y=1 \mid X=x) = \frac{\pi_1 f_1(x)}{\pi_1 f_1(x) + \pi_2 f_2(x)}$$

$$P(Y=2 \mid X=x) = \frac{\pi_2 f_2(x)}{\pi_1 f_1(x) + \pi_2 f_2(x)}$$

Clasifico x en 1 si

$$\pi_1 f_1(x) > \pi_2 f_2(x).$$

si $\pi_1 = \pi_2$, clasifico en 1

si $\underline{\underline{f_1(x)}} > \underline{\underline{f_2(x)}}$.

Nos tenemos que acordar la expresión de la densidad normal.

<u>Univariada.</u>

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

En bivariado: $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$

¡ $x \in \mathbb{R}^2$!

En el ejercicio; para f_1 $\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Sigma = I$.

$x = (x_1, x_2)$

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}' I^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1 - 3 \quad x_2 - 1)\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[(x_1-3)^2 + (x_2-1)^2\right]}$$

para f_2, $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\Sigma = I$, encuentro que:

$$f_2(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[(x_1-1)^2 + (x_2-3)^2\right]}.$$

$$\boxed{f_1(x) > f_2(x)}$$

$$\iff \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[(x_1-3)^2 + (x_2-1)^2\right]} > \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[(x_1-1)^2 + (x_2-3)^2\right]}$$

$$\iff (x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 < (x_1-1)^2 + (x_2-3)^2.$$

$$\iff x_1^2 - 6x_1 + 9 + x_2^2 - 2x_2 + 1 < x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 - 6x_2 + 9$$

$$\iff -4x_1 < -4x_2 \iff \boxed{x_1 > x_2}$$

Conclusión:

Clasifico $x=(x_1,x_2)$ en la población 1 si $x_1 > x_2$.

Frontera de Bayes $\partial = \{x=(x_1,x_2) : x_1 = x_2\}$.

$$F(x_1,x_2) = \mathbb{1}\{f(x_1,x_2) > 0.5\}$$

$$= \mathbb{1}\{\bar{f}(x_1,x_2) > 0\}.$$

siendo $\bar{f}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) - 0.5$

$$f(x_1,x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 .$$

$$= \begin{cases} 1, & \beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2 > 0.5 \\ 0, & \beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2 \leq 0.5 \end{cases}$$

La frontera se da cuando

$$\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2 = 0.5$$

$$\partial_{LM} = \left\{(x_1,x_2): x_2 = \frac{0.5-\beta_0}{\beta_2} + \frac{-\beta_1}{\beta_2} x_1 \right\}$$

$$\partial_{BAYES} = \{(x_1,x_2): x_1 = x_2\}$$