Señales y Sistemas

Transformada Z

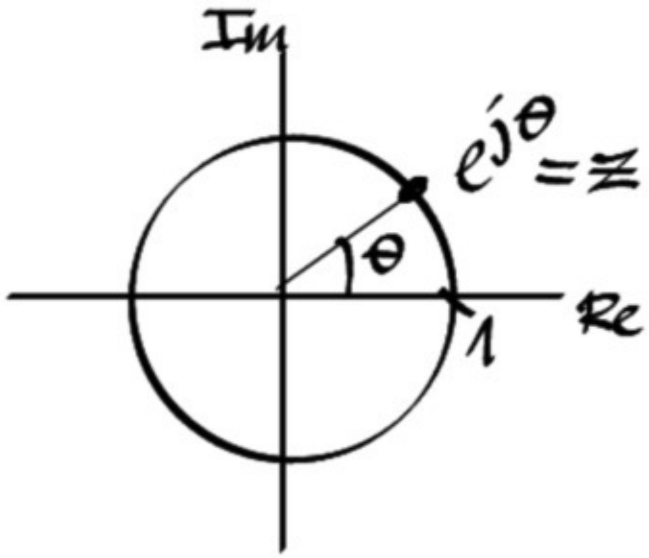
Instituto de Ingeniería Eléctrica

UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Transformada Z y Transformada de Fourier

$$X(z)|_{z=e^{j\theta}} = X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\theta n}$$

$$X(z) = X\left(re^{j\theta}\right) = \sum_{n} x[n]\left(re^{j\theta}\right)^{-n} = \sum_{n}\left(x[n]r^{-n}\right)e^{-jn\theta}$$
$$= \mathcal{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\}$$



- ¿Convergencia? $\mathcal{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\}$ absolutamente sumable (depende de $|r|$).
- La TZ puede converger en regiones (ROC) donde la DTFT no converge.
- TZ generaliza a la DTFT.
- Permite analizar SLIT de variable **discreta** en casos más generales.

Ejemplo (10.1)

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$X(z) = \sum_n a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a/z)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

ROC

Para $a=1$ tenemos $x[n] = u[n]$ y

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1$$

Que no tiene DTFT.

$S^1 \not\subset$ ROC

Vemos que en general es una función racional (cociente de polinomios)

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Las raíces de $N(z)$ serán los ceros de $X(z)$ y las raíces de $D(z)$ serán los polos y podemos representarlos en el plano-Z.

Ejemplo (10.2)

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

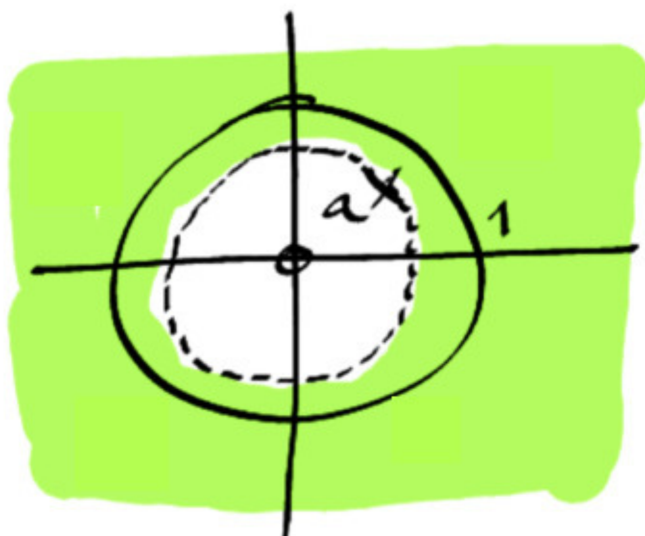
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n \underbrace{u[-n-1]}_{\neq 0,\, \forall n<0} z^{-n} = -\sum_{-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \underset{m=-n}{=} -\sum_{m=1}^{\infty} (z/a)^m = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (z/a)^m$$

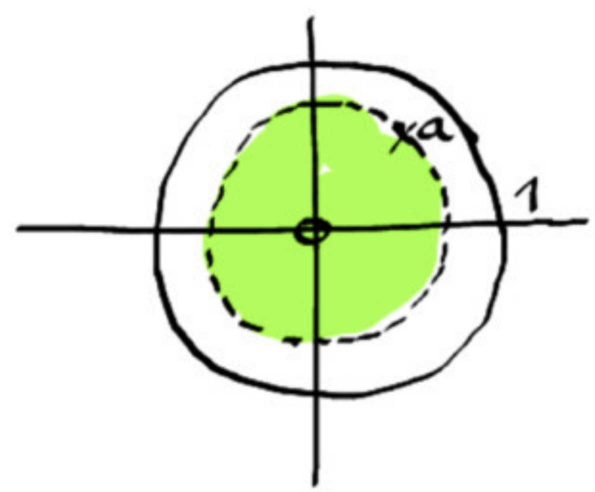
$$\underset{|z/a|<1}{=} 1 - \frac{1}{1-z/a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z-a}} \quad \boxed{|z|<|a|}$$

ROC

$$x[n] = a^n u[n] \qquad X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad x[n] = -a^n u[-n-1]$$





- La TZ son **dos partes:** la expresión algebraica $X(z)$, y la ROC.

Ejemplo (10.3)

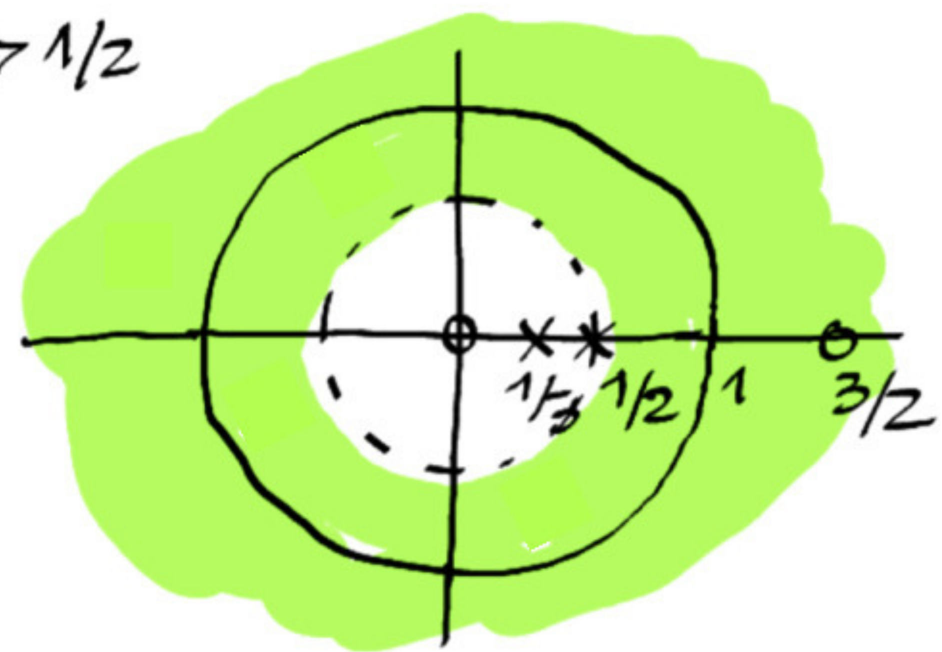
$$x[n] = 7\left(1/3\right)^n u[n] - 6\left(1/2\right)^n u[n]$$

$$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} = 7\sum_0^{\infty}\left(1/3z\right)^n - 6\sum_0^{\infty}\left(1/2z\right)^n =$$

$$= \underbrace{7\,\frac{1}{1-1/3\,z^{-1}}}_{|z|>1/3} - \underbrace{6\,\frac{1}{1-1/2\,z^{-1}}}_{|z|>1/2} = \frac{1-3/2\,z^{-1}}{(1-1/3\,z^{-1})(1-1/2\,z^{-1})}$$

$$= \frac{z(z-3/2)}{(z-1/3)(z-1/2)}, \quad |z|>1/2$$

Podemos verlo por linealidad de la TZ y la intersección de las ROCs.



Ejemplo (10.4)

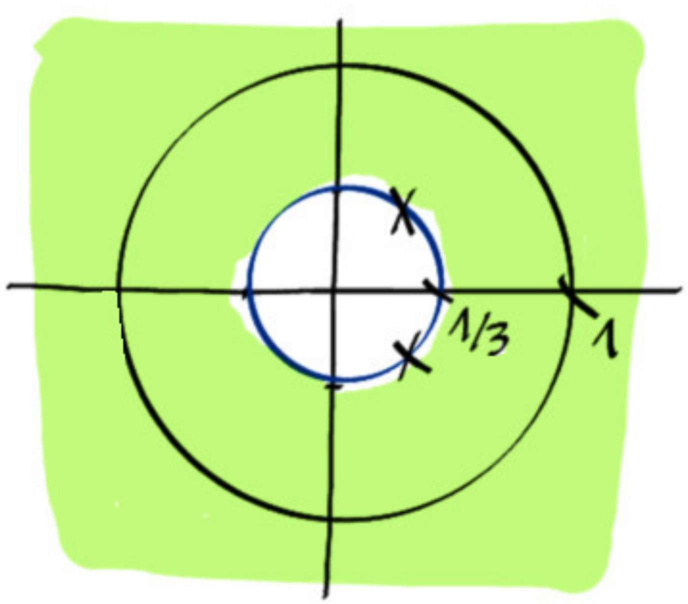
$$x[n] = (1/3)^n \sin\left(\tfrac{\pi}{4} n\right) u[n] = \frac{1}{2j}\left(\left(\frac{1}{3} e^{j\pi/4}\right)^n - \left(\frac{1}{3} e^{-j\pi/4}\right)^n\right) u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2j}\left(\left(\frac{1}{3} e^{j\pi/4}\right)^n - \left(\frac{1}{3} e^{-j\pi/4}\right)^n\right) u[n]\, z^{-n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2j}\, \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{j\pi/4} z^{-1}}}_{\text{si } \left|\frac{1}{3} e^{j\pi/4} z^{-1}\right| < 1} - \underbrace{\frac{1}{2j}\, \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\pi/4} z^{-1}}}_{\text{si } \left|\frac{1}{3} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right| < 1} =$$

$$\Rightarrow |z| > 1/3$$

$$X(z) = \frac{\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) z}{\left(z - \frac{1}{3} e^{j\pi/4}\right)\left(z - \frac{1}{3} e^{-j\pi/4}\right)}, \quad |z| > 1/3$$



Polos y ceros de la TZ

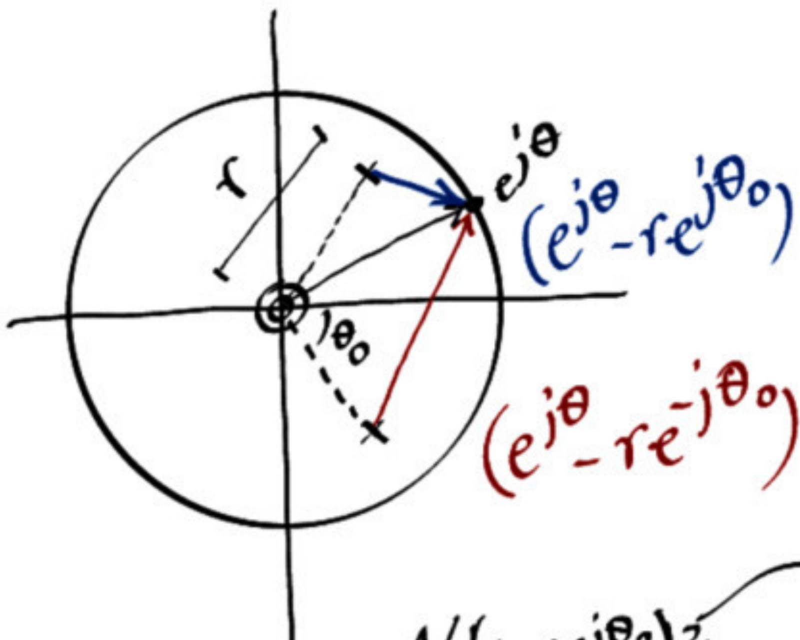
- TZ racional $X(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$
- Las raíces de $X(z)$ son sus **ceros**. Los **polos** son los ceros de $D(z)$.
- El conjunto de **polos** y **ceros** de una TZ la caracterizan completamente.
- El diagrama de polos y ceros también nos permite analizar la TF, $X(e^{j\theta})$.

Evaluación de la respuesta frecuencial a partir de polos y ceros de la TZ

Evaluación de la respuesta frecuencial a partir de polos y ceros de la TZ

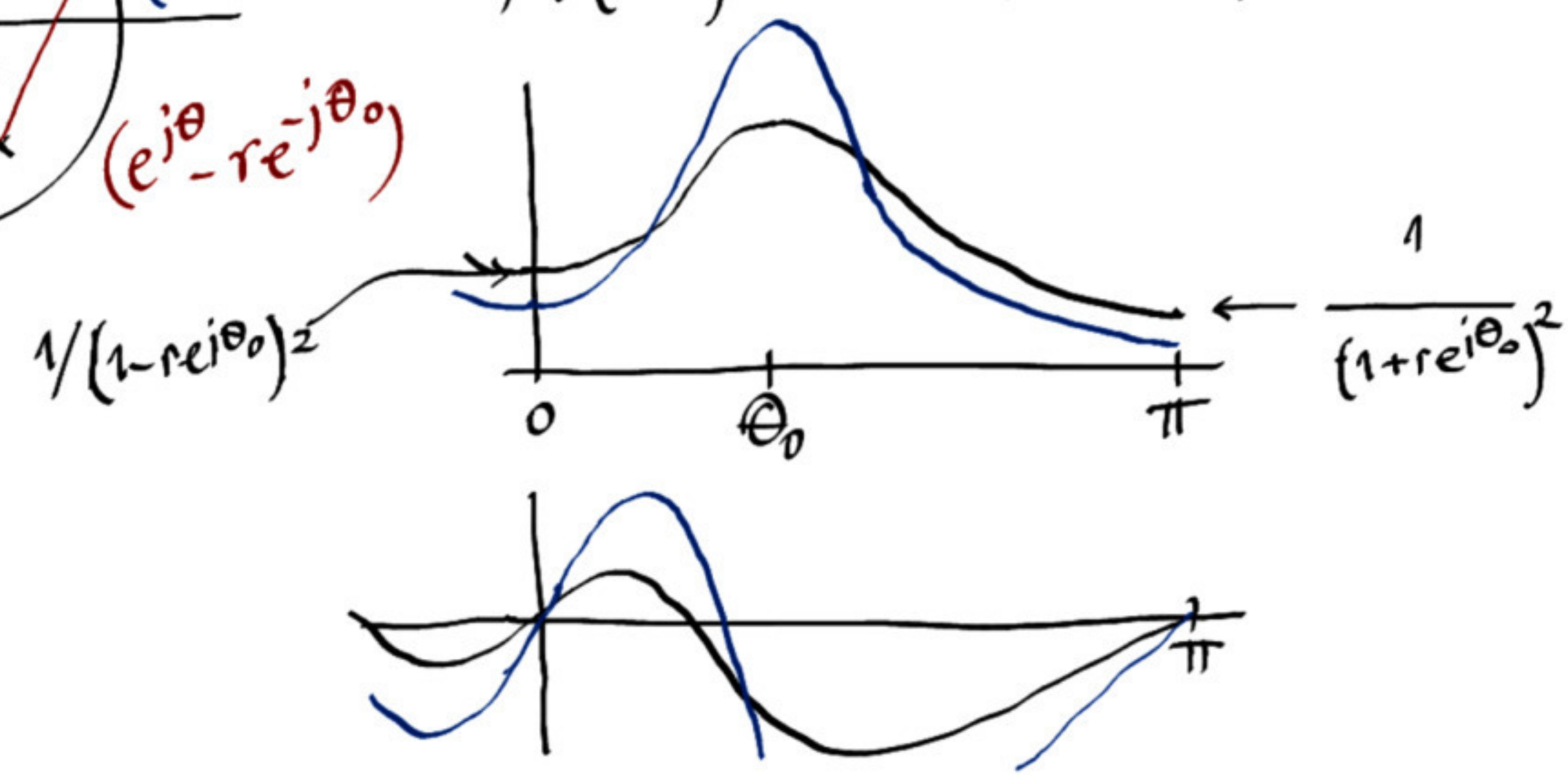
$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)} \qquad z_1 = r\, e^{j\theta_0}$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{e^{2j\theta}}{(e^{j\theta} - r e^{j\theta_0})(e^{j\theta} - r e^{-j\theta_0})}$$



$$|H(e^{j\theta})| = |e^{j2\theta}|\,|e^{j\theta} - r e^{j\theta_0}|^{-1}\,|e^{j\theta} - r e^{-j\theta_0}|^{-1}$$

$$\measuredangle H(e^{j\theta}) = 2\theta - \measuredangle(e^{j\theta} - r e^{j\theta_0}) - \measuredangle(e^{j\theta} - r e^{-j\theta_0})$$



Propiedades de la ROC

Propiedades de la ROC

1. La ROC de $X(z)$ consiste en anillos del plano-Z centrado en el origen.
2. La ROC de $X(z)$ racional (cociente de polinomios) no contiene polos.
3. Si $x[n]$ es de duración finita (*soporte acotado*) y absolutamente sumable, entonces la ROC es todo el plano-Z, (*tal vez* excepto en 0 y/o ∞).

$$x[n] = \delta[n] \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \;, \; ROC = \mathcal{Z}$$

$$x[n] = \delta[n-1] \qquad X(z) = \sum_{n} \delta[n-1] z^{-n} = z^{-1} \;, \; ROC = \mathcal{Z} - \{0\}$$

$$x[n] = \delta[n+1] \qquad X(z) = \sum_{n} \delta[n+1] z^{-n} = z \;, \; ROC = \mathcal{Z} - \{\infty\}$$

4. Si $x[n]$ es *de soporte acotado a la derecha* y el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces todos los complejos con $|z| > r_0$ están en la ROC.
5. Si $x[n]$ es *de soporte acotado a la izquierda* y el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces todos los complejos con $|z| < r_0$ están en la ROC.

Propiedades de la ROC

6. Si $x[n]$ es *de soporte no acotado* y el círculo $|z|=r_0$ está en la ROC, entonces la ROC es un anillo que incluye a $|z|=r_0$.

7. Si $X(z)$ es racional, entonces su ROC está limitada por los polos o se extiende al infinito. Además, ningún polo de $X(z)$ está contenido en la ROC.

8. Si $X(z)$ es racional y si $x[n]$ es de *soporte acotado a la derecha*, la ROC es la región al **exterior** del círculo que pasa por el polo de **mayor** módulo (si $x[n]=0,\ n<0$ entonces incluye al infinito). Para una señal de *soporte acotado a la izquierda*, la ROC es la región al **interior** del círculo que pasa por el polo de **menor** módulo (si $x[n]=0,\ n>0$ entonces incluye al cero).

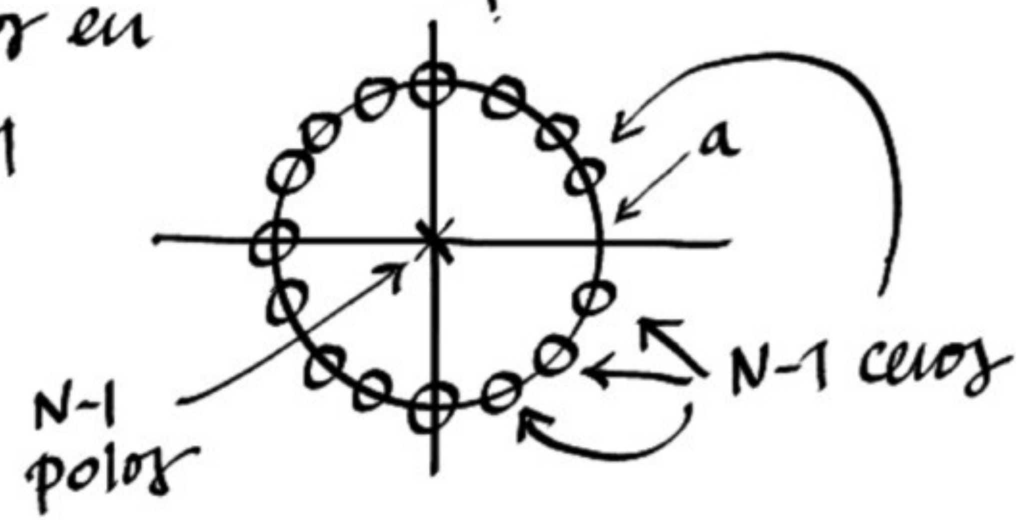
Ejemplo (10.6)

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \quad a>0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} (a/z)^n = \frac{1-(a/z)^N}{1-a/z} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a}$$

La ROC será todo el plano-z excepto el $z=0$.
Hay $N-1$ polos en $z=0$ y un polo en $z=a$ que se cancela con el cero en $z=a$. Quedan $N-1$ ceros en

$$z_k = a\, e^{j(2\pi k/N)} \quad k=1,\dots,N-1$$



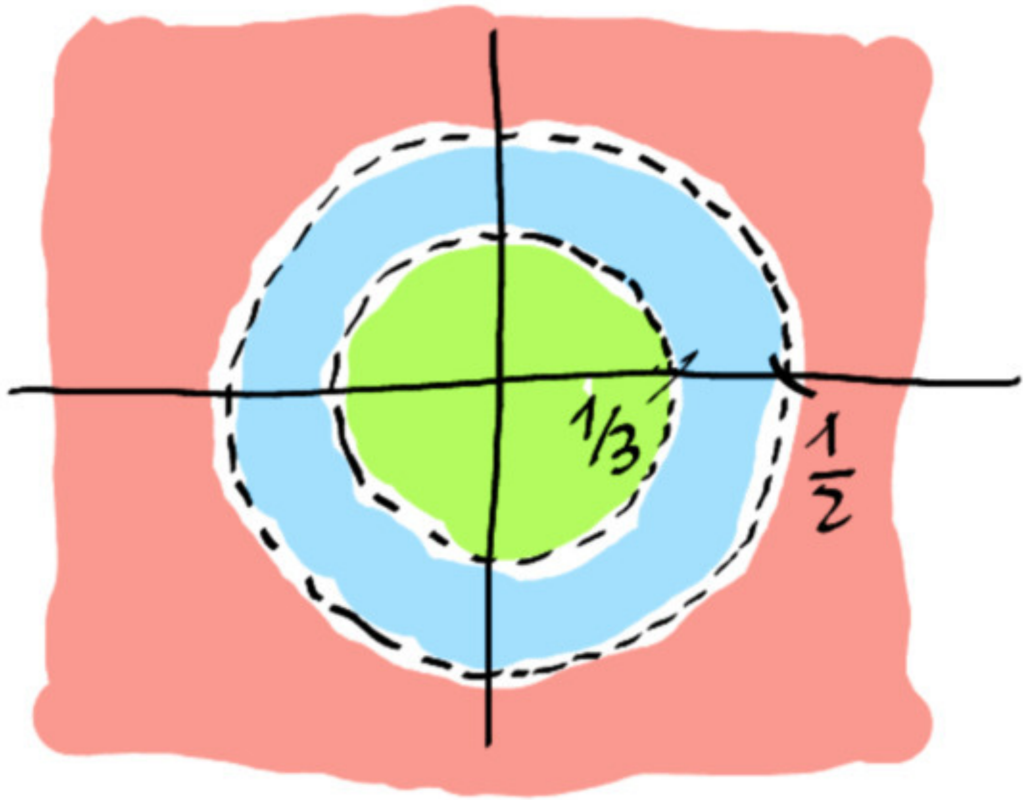
Ejercicio

$$X(z) = \frac{z}{z-1/2} + \frac{z}{z+1/3}$$ ¿Cuál es $x[n]$? Depende de la ROC.

$$x_1[n] = (1/2)^n u[n] + (-1/3)^n u[n] \qquad |z| > 1/2 \left(y\ |z| > 1/3 \right)$$

$$x_2[n] = -(1/2)^n u[-n-1] + (-1/3)^n u[n] \qquad 1/3 < |z| < 1/2$$

$$x_3[n] = -(1/2)^n u[-n-1] - (-1/3)^n u[-n-1] \qquad |z| < 1/3$$



Podría haber otra $x_4[n]$

$$x_4[n] = (1/2)^n u[n] - (-1/3)^n u[-n-1]$$

Pero no hay intersección de las ROC, entonces no converge nunca

Inversa de la Transformada Z

Inversa de la Transformada Z

- Tenemos la relación entre TZ y TF

$$X(z) = X(re^{j\theta}) = \mathcal{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\}$$

$$x[n] = r^n \mathcal{F}^{-1}\left\{X(re^{j\theta})\right\} = r^n \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(re^{j\theta}\right)e^{j\theta n}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(re^{j\theta}\right)\left(re^{j\theta}\right)^n d\theta$$

$$= \frac{1}{j2\pi}\oint_{2\pi} X(z)z^{n-1}dz \qquad (z = re^{j\theta},\, dz = jre^{j\theta}d\theta = jz\,d\theta)$$

- Queda una integral de línea que puede resolverse mediante el Teorema de los Residuos.
- Igual que en Transformada de Laplace generalmente tendremos TZ racionales que pueden descomponerse en términos de la siguiente forma para los que conocemos su $x[n]$ (depende de la ROC)

$$X(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{1 - az^{-1}}$$

  - Veremos que imponiendo condiciones de **causalidad** y/o **estabilidad** queda definida la ROC a usar.

Inversa de la Transformada Z

Ej. (10.14) $\quad X(z) = \log\left(1 + az^{-1}\right), \quad |z| > |a| \Rightarrow \left|\frac{a}{z}\right| < 1$

Podemos aproximar o expandir esta serie de potencia con una descomposición de Taylor.

$$\Rightarrow \log\left(1 + v\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{v^n}{n}, \quad |v| < 1$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} a^n z^{-n} \longrightarrow x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \dfrac{a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

Propiedades de la Transformada Z

Propiedades de la Transformada Z

$$x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \mathrm{ROC}: R \qquad x_1[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z), \mathrm{ROC}: R_1 \qquad x_2[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_2(z), \mathrm{ROC}: R_2$$

- Linealidad

$$a\, x_1[n] + b\, x_2[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} a\, X_1(z) + b\, X_2(z), \mathrm{ROC} \supset R_1 \cap R_2$$

Puede existir cancelación cero-polo.

$x_1[n] = a^n u[n]$ $\quad R_1 = R_2 = \{|z| > |a|\}$ $\quad x_1[n] - x_2[n] = \delta[n]$

$x_2[n] = a^n u[n-1]$ $\quad \mathrm{ROC} = \mathbb{Z}$

- Desplazamiento temporal

$$x[n-n_0] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z), \quad \mathrm{ROC} = R - \{0, \infty\}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0]\, z^{-n} = \sum_m x[m]\, z^{-m-n_0} = z^{-n_0} X(z)$$

$m = n - n_0$

$-n = -m - n_0$

- Reversión temporal

$$x[-n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(1/z), \quad \mathrm{ROC} = 1/R$$

Si $z_0 \in \mathrm{ROC} \Rightarrow 1/z_0 \in R$

- Producto con exponencial

$$z_0^n x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad \mathrm{ROC} = |z_0| R$$

Tarea: demostrar estas propiedades.

Propiedades de la Transformada Z

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \mathrm{ROC}: R \qquad x_1[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z), \mathrm{ROC}: R_1 \qquad x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_2(z), \mathrm{ROC}: R_2$$

- Expansión temporal: debe ser entero (diferencia con tiempo continuo)

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & n = \dot{k} \\ 0 & n \neq \dot{k} \end{cases}$$ se insertan (k - 1) ceros

$$x_{(k)}[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z^k), \quad \mathrm{ROC} = R^{1/k}$$ Si $z_0 \in R \Rightarrow z_0^{1/k} \in R^{1/k}$

$$X_{(k)}(z) = \sum_n x_{(k)}[n] z^{-n} \underset{n = mk}{=} \sum_m x[m] z^{-mk} = \sum_m x[m] (z^k)^{-m} = X(z^k)$$

- Conjugación

$$x^*[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(z^*), \quad \mathrm{ROC} = R$$

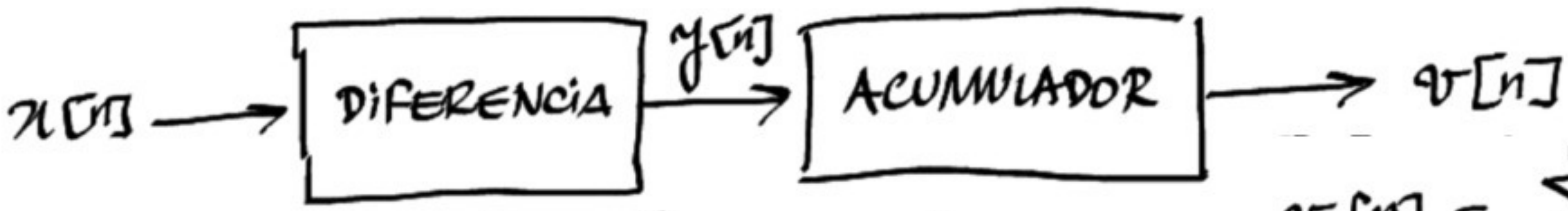
- Convolución

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z), \quad \mathrm{ROC} \supset R_1 \cap R_2$$

Tarea: demostrar estas propiedades.

Ejemplo

Ej (10.15 & 10.16)



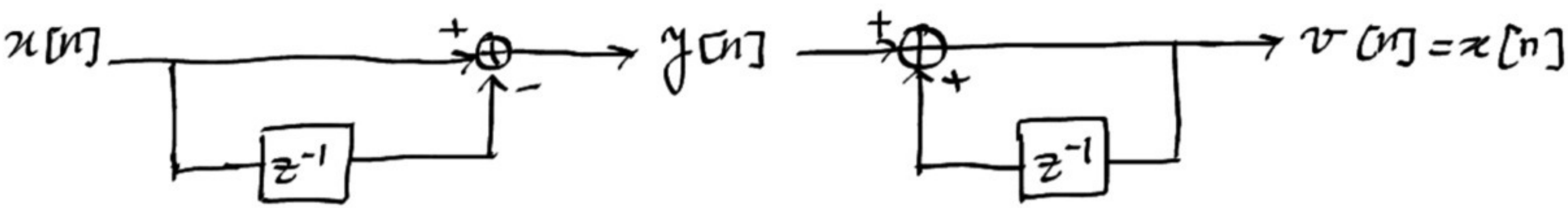
$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ $\qquad h_2[n]$

$$v[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} y[k] = u[n] * y[n]$$

$$h_2[n] = u[n]$$

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} \qquad H_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$h_1[n] * h_2[n] \xleftrightarrow{\ z\ } H_1(z)\,H_2(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$$



$$v[n] = y[n] + v[n-1]$$

Propiedades de la Transformada Z

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \mathrm{ROC}: R \qquad x_1[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z), \mathrm{ROC}: R_1 \qquad x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_2(z), \mathrm{ROC}: R_2$$

- Diferenciación en z

$$n\,x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\,\frac{dX(z)}{d(z)}, \quad \mathrm{ROC} = R$$

Ej (10.17) $\quad X(z) = \log\left(1 + az^{-1}\right) \quad |z| > |a|$

$$n\,x[n] \longleftrightarrow -z\,\frac{dX(z)}{dz} = -z\,\frac{1}{1+az^{-1}}(-az^{-2}) = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}$$

$$az^{-1}\,\frac{1}{1+az^{-1}} \longleftrightarrow a\,(-a)^{n-1}u[n-1], \quad |z| > |a|$$

$$\Rightarrow x[n] = -\frac{(-a)^n}{n}u[n-1]$$

$$= (-1)^{n+1}\,\frac{a^n}{n}\,u[n-1]$$

- Teorema de Valor Inicial

Si $x[n]$=0, n<0, entonces

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Tarea: demostrar estas propiedades.

Ejercicio

Ej. $x[n] = \cos(\theta_0 n)\, u[n] = \dfrac{e^{j\theta_0 n} + e^{-j\theta_0 n}}{2}\, u[n]$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{j\theta_0 n} z^{-n} = 1/2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{j\theta_0}/z\right)^n \underset{|z|>1}{=} 1/2 \, \frac{1}{1 - e^{j\theta_0} z^{-1}}$$

$$X(z) = 1/2 \, \frac{1}{1 - e^{j\theta_0} z^{-1}} + 1/2 \, \frac{1}{1 - e^{-j\theta_0} z^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{2 - \left(e^{j\theta_0} + e^{-j\theta_0}\right) z^{-1}}{1 + z^{-2} + z^{-1}\left(e^{j\theta_0} + e^{-j\theta_0}\right)} = \frac{1 - \cos(\theta_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\theta_0) z^{-1} + z^{-2}}$$

$|z| > 1$

Transformada Z Unilateral (TZU)

Transformada Z Unilateral (TZU)

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

- Para analizar sistemas causales donde la entrada está **en reposo** para $n<0$.
- Al ser señales con *soporte acotado a la derecha* la ROC va a ser un el **exterior de un círculo** centrado en el origen.
- Para señales nulas antes de cero coincide con la *Transformada Z* ya definida.

$$x[n] = a^n u[n] \qquad \mathcal{X}(z) = X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$x[n] = a^{n+1} u[n+1] \qquad X(z) = \frac{z}{1 - a z^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} u[n+1] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} (a/z)^n$$

$$= \frac{a}{1 - a z^{-1}} \quad |z| > |a| \quad \text{y} \quad \mathcal{X}(z) \neq X(z)$$

Propiedades de la Transformada Z Unilateral

Propiedades de la Transformada Z Unilateral

Las propiedades de TZU son iguales que las vistas para TZ, excepto una...

- Desplazamiento temporal

$$x\left[n-n_0\right] \overset{\mathcal{UZ}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}\mathcal{X}(z) + z^{n_0}\sum_{k=-n_0}^{-1} x[k]z^{-k}$$

Demo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n} \underset{\substack{\uparrow \\ n-n_0=m}}{=} z^{-n_0}\sum_{m=-n_0}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-n_0}\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} + x[-n_0] + x[-n_0+1]z + x[-n_0+2]z^2 + \cdots + x[-1]z^{n_0-1}$$

$$= z^{-n_0}\mathcal{X}(z) + \sum_{k=-n_0}^{-1} x[k]z^{n_0-k}$$

$$x[n-1] \longleftrightarrow z^{-1}\mathcal{X}(z) + x[-1] \qquad x[n+1] = z\mathcal{X}(z) - z\,x[0]$$

$$x[n-2] \longleftrightarrow z^{-2}\mathcal{X}(z) + x[-1]z + x[-2] \qquad x[n+2] = z^2\mathcal{X}(z) - z^2x[0] - z\,x[-1]$$

Análisis y caracterización de SLITs con Transformada Z

Análisis y caracterización de SLITs con Transformada Z

- Análisis de la respuesta de un sistema a partir de $H(z)$:
- Respuesta frecuencial (función de transferencia o función de sistema), $H(e^{j\theta})$, si el círculo unidad está incluido en la ROC.
  - Podemos analizar propiedades del sistema a partir de $H(z)$ y sus ceros y polos.
- Causalidad de $H(z)$
  - Un SLIT de tiempo discreto es causal ($h[n]=0$, $n<0$, *soporte acotado a la derecha*) si y solo si la ROC de $H(z)$ es **el exterior de un círculo** centrado en el origen incluyendo $z = \infty$.
  - Si $H(z)$ es racional su ROC queda determinado por sus polos, entonces, un SLIT de tiempo discreto es causal si y solo si:
    - la ROC es el **el exterior de un círculo** que pasa por el **polo de mayor módulo**, y
    - el orden de numerador no es mayor que el orden del denominador.

Análisis y caracterización de SLITs con Transformada Z

Ej. (10.20) $\quad H(z) = \dfrac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + 1/4\, z + 1/8}$ no es causal porque orden del numerador es mayor que el del denominador.

Ej. (10.21) $\quad H(z) = \dfrac{1}{1 - 1/2\, z^{-1}} + \dfrac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$

La ROC es el exterior del polo más externo $|z| = 2$, entonces será de soporte a la derecha.

$h[n] = \left((1/2)^n + 2^n \right) u[n]$ y claramente es causal.

$(h[n] = 0, \ \forall n < 0)$

Pero no es estable, pues $\sum_n |h[n]| \longrightarrow \infty$

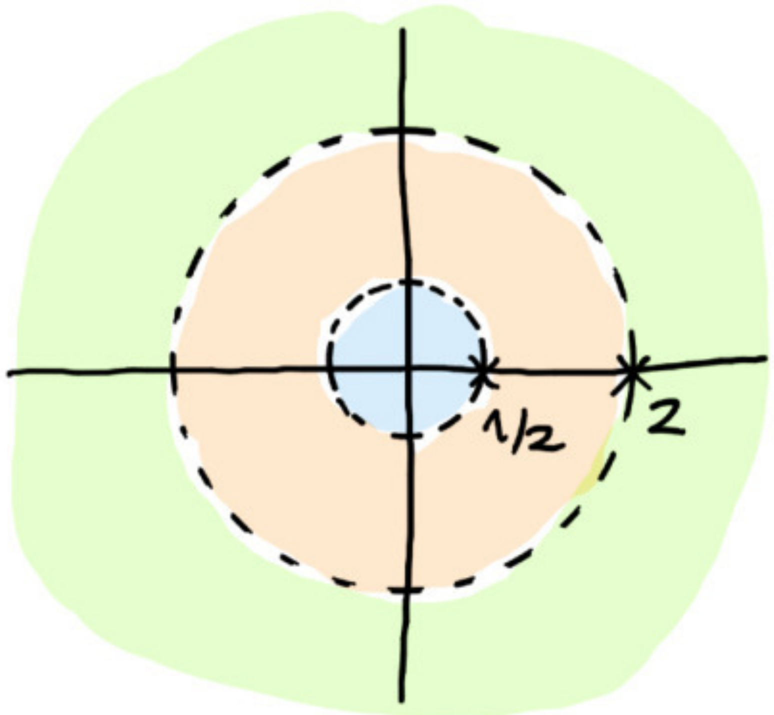
¿cómo lo vemos en $H(z)$?

Análisis y caracterización de SLITs con Transformada Z

- Estabilidad BIBO
  - $h[n]$ absolutamente sumable $\Longrightarrow$TF converge uniformemente $\Longrightarrow$ $z{=}e^{j\theta}$ en ROC
  - Un SLIT de tiempo discreto es estable si y solo si la ROC de su función de transferencia $H(z)$ incluye al círculo unidad ($|z|{=}1$).
  - Si la $H(z)$ es racional, los polos y ceros determinan sus características.
    - **Un SLIT causal de tiempo discreto con función de transferencia $H(z)$ racional es estable BIBO si y solo si todos los polos de $H(z)$ están dentro del círculo unidad, o sea, todos sus polos tienen módulo menor que uno.**

Análisis y caracterización de SLITs con Transformada Z

Volviendo a $H(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{1}{1-2z^{-1}} \quad |z|>2$



Vemos que tiene un polo en $z=2$ y confirmamos que no es estable.

$h[n] = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right) u[n]$.

Sin embargo, podemos hallar la antitransformada en el anillo $\frac{1}{2} < |z| < 2$ que contiene al círculo unidad

$\Rightarrow \quad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$ y será estable pero no causal.

La tercera antitransformada queda

$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 2^n u[-n-1]$ que no es estable ni causal

Resolución de ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

Resolución de ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

- Consideremos la ecuación en diferencias de coeficientes constantes

$$y[n] + 3\,y[n-1] = x[n]$$

- Aplicando la TZ tenemos

$$\mathcal{Y}(z) + 3\,z^{-1}\,\mathcal{Y}(z) = \mathcal{X}(z)$$

- Y podemos hallar

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}}$$

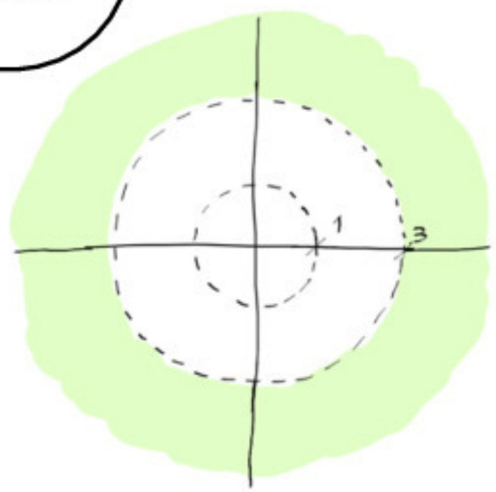
¿Estabilidad?
¿Causalidad?

- Evaluemos la respuesta al escalón

$$x[n] = \alpha\,u[n] \Rightarrow \mathcal{X}(z) = \frac{\alpha}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}}\,\frac{\alpha}{1-z^{-1}} = \frac{(3/4)\alpha}{1+3z^{-1}} + \frac{(1/4)\alpha}{1-z^{-1}}$$

$$y[n] = \alpha\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)(-3)^n\right]u[n]$$



Resolución de ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

- Agreguemos condiciones iniciales $y[-1] = \beta$
- Aplicamos TZU a la ecuación en diferencias

$$\mathcal{Y}(z) + 3(z^{-1}\mathcal{Y}(z) + y[-1]) = \mathcal{X}(z) = \boxed{\frac{\alpha}{1 - z^{-1}}}$$

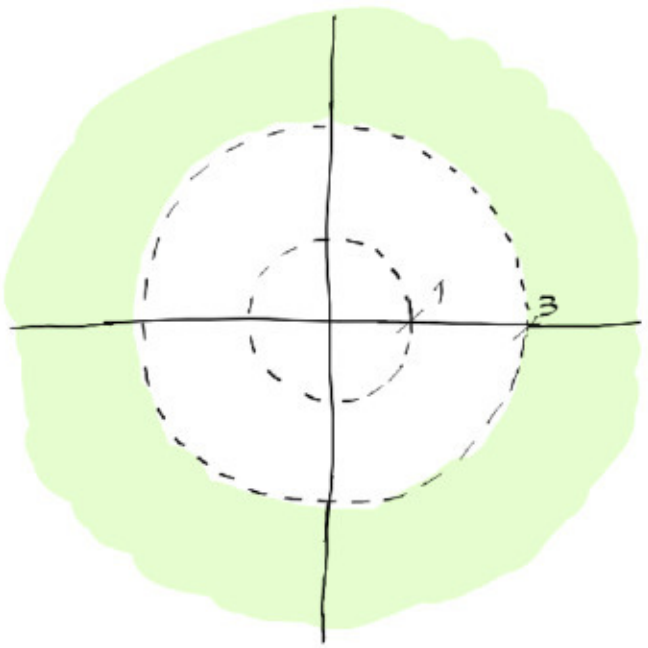
Este es el caso particular de entrada con escalón de altura α $x[n]=\alpha u[n]$

- Resolviendo para

$$\mathcal{Y}(z) = \underbrace{-\frac{3\beta}{1 + 3z^{-1}}}_{\text{Respuesta al entrada cero respuesta natural, o respuesta transitoria.}} + \underbrace{\frac{\alpha}{(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})}}_{\text{Respuesta a estado cero, respuesta forzada, o respuesta en régimen.}}$$

Si el sistema es BIBO estable esta respuesta se anula con el tiempo. (No sucede en este ejemplo)

$$= \frac{3/4(\alpha - 4\beta)}{(1 + 3z^{-1})} + \frac{\alpha/4}{(1 - z^{-1})}$$



$$y[n] = \frac{3}{4}(\alpha - 4\beta)(-3)^n u[n] + \frac{\alpha}{4}u[n], \quad n \geq 0$$

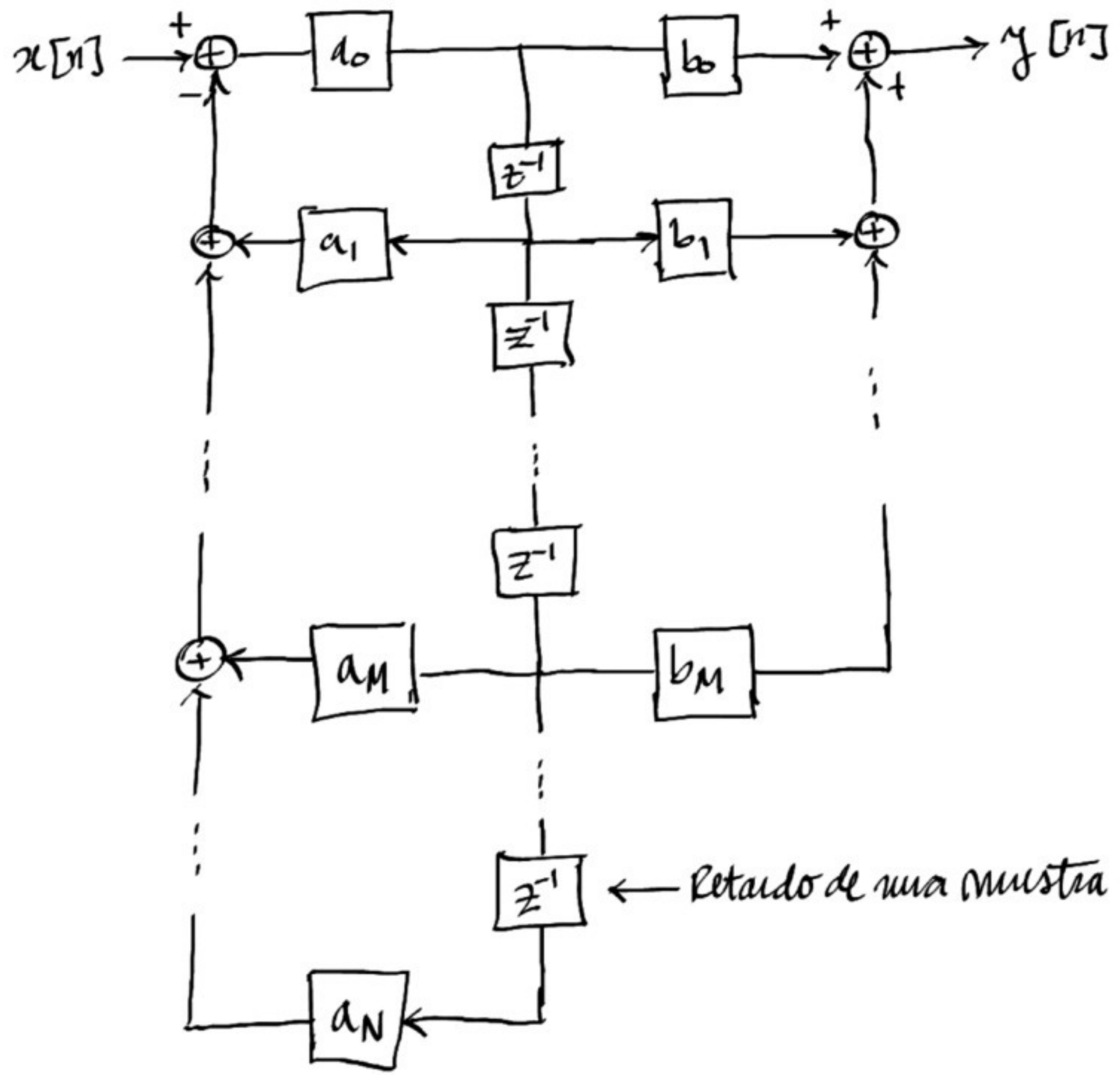
SLITs y ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

- Ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

$$\Rightarrow Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



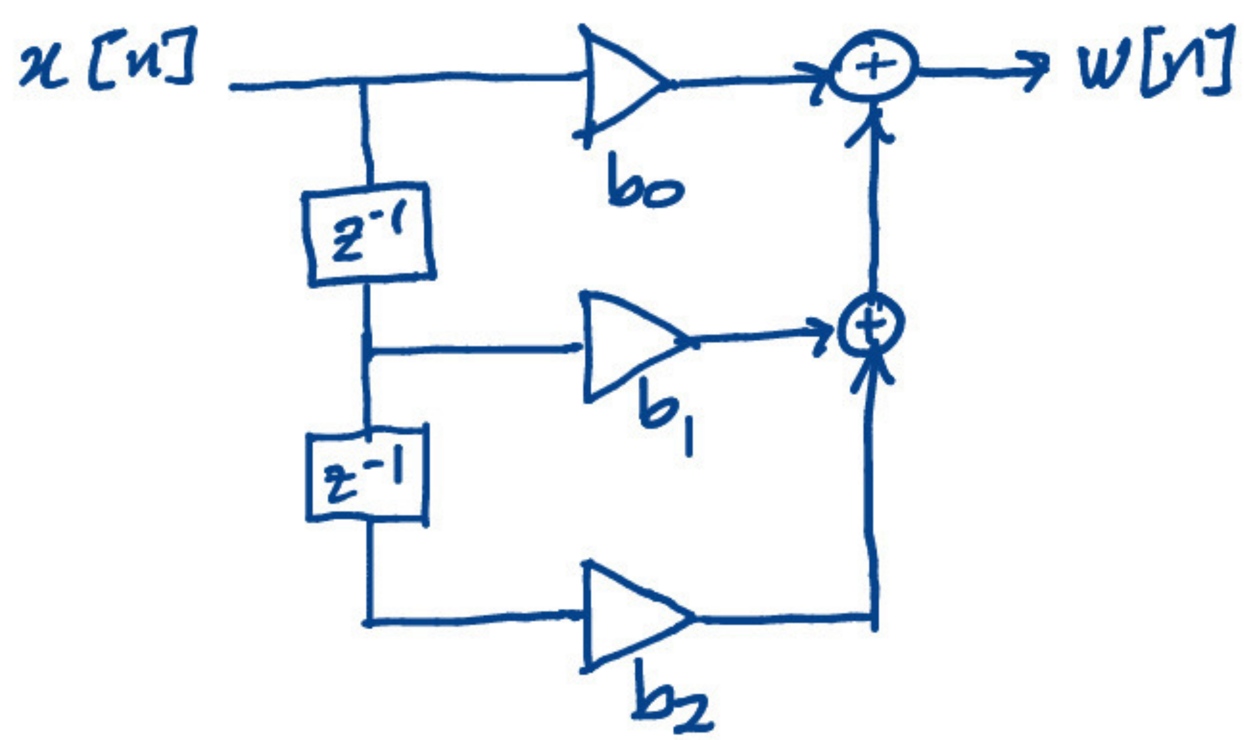
Forma directa o filtro transversal

ECUACIÓN EN RECURRENCIA $\Rightarrow$ TRANSFERENCIA DEL SISTEMA

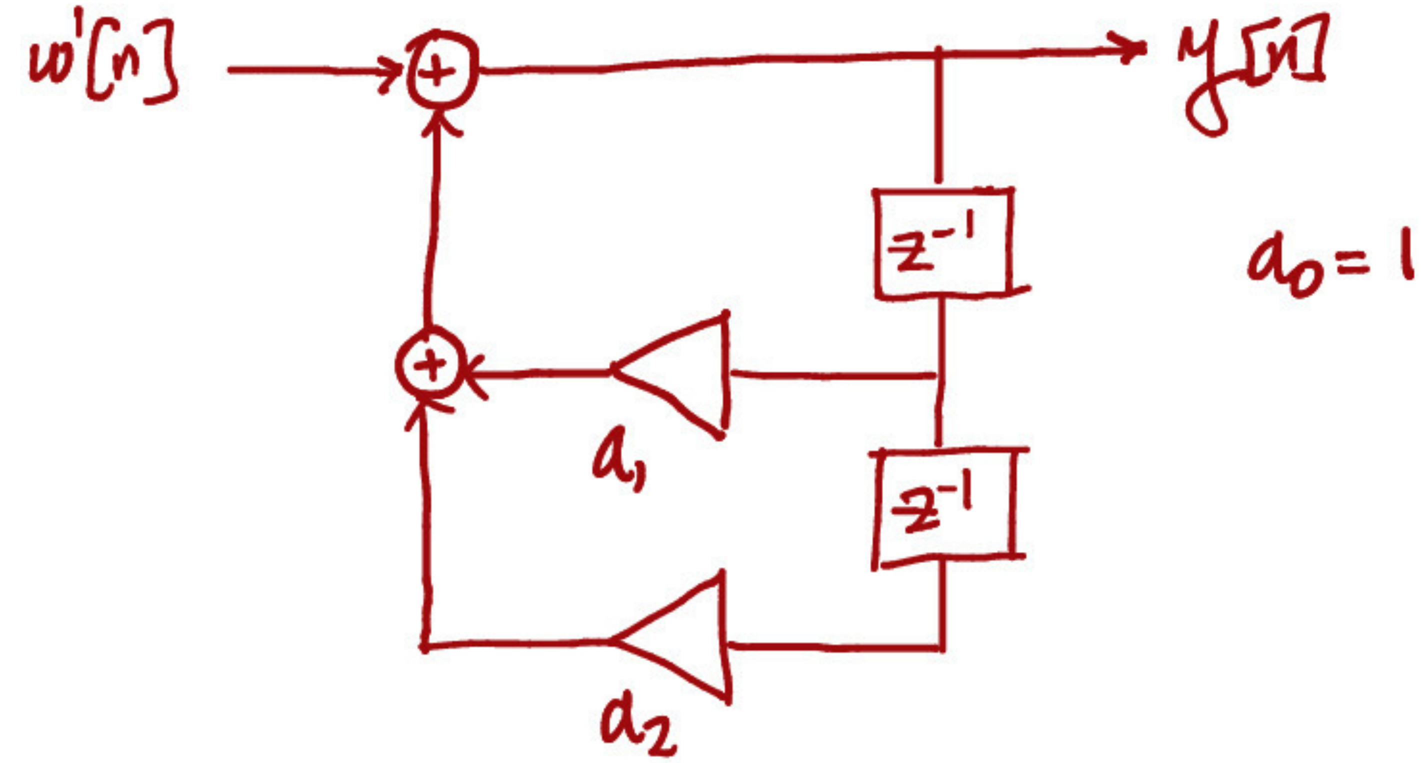
$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_j\, x[n-m] \qquad H(z) = \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} b_j\, z^{-m}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}}$$

$$H(z) = \underbrace{\sum_{m=0}^{M} b_j\, z^{-m}}_{H_1(z)} \; \underbrace{\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}}}_{H_2(z)} = H_1(z)\,H_2(z) = H_2(z)\,H_1(z)$$

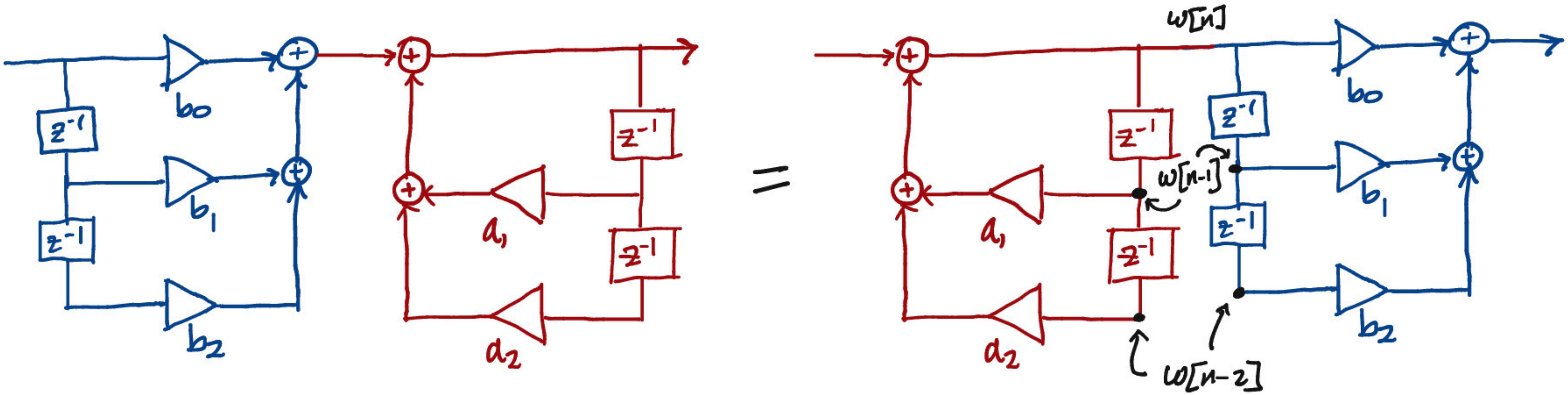
$H_1(z)$:



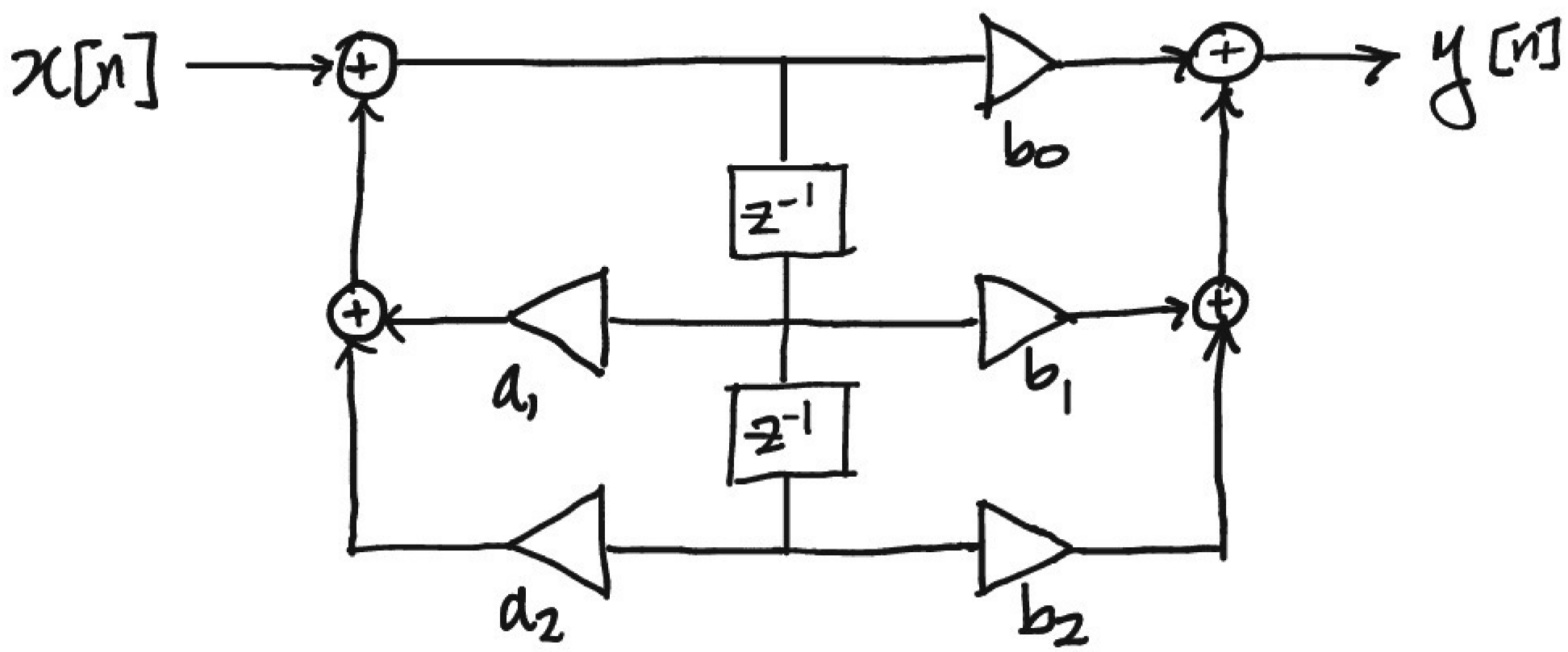
$H_2(z)$:



$$H(z) = H_1(z)\,H_2(z) = H_2(z)\,H_1(z)$$

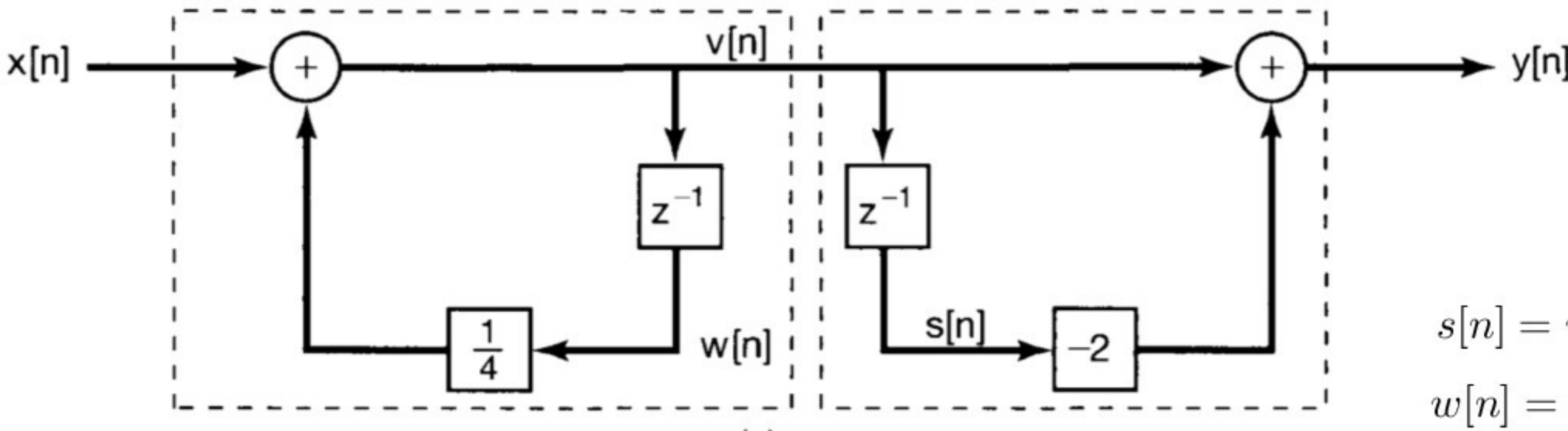


$H(z)$



SLITs y ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

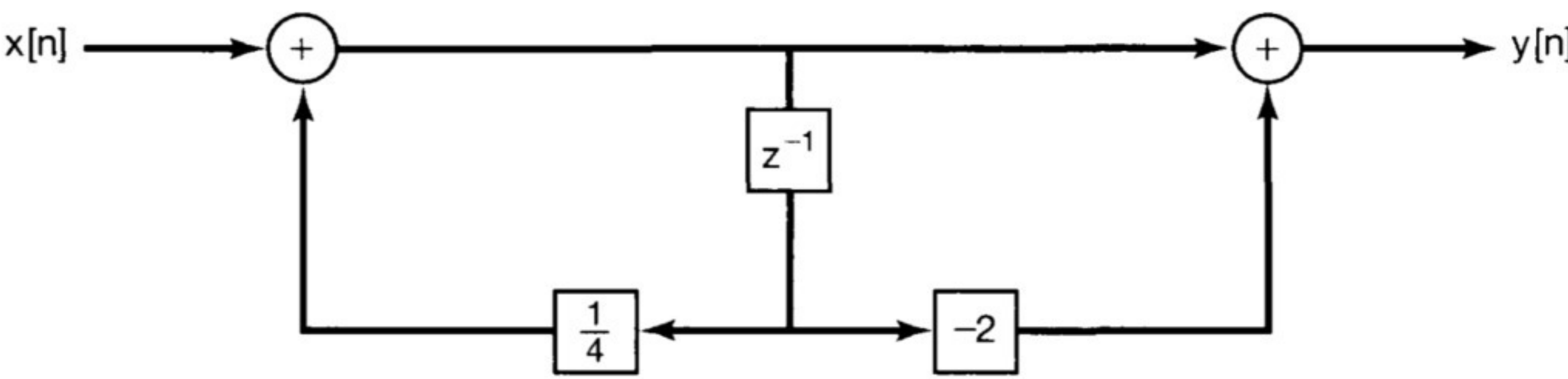
- Recordemos el ejemplo para usar la **menor cantidad de retardos** posible.



(a)

$$s[n] = v[n-1]$$

$$w[n] = v[n-1]$$



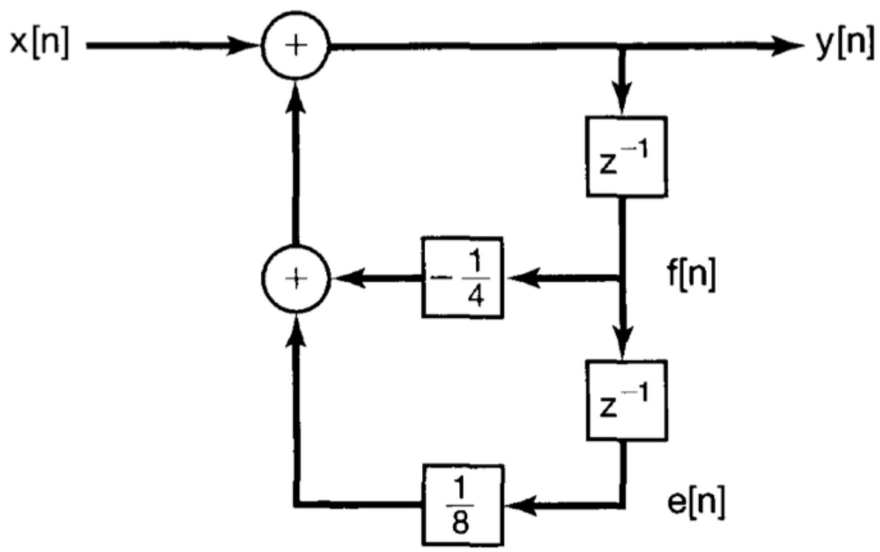
(b)

SLITs y ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

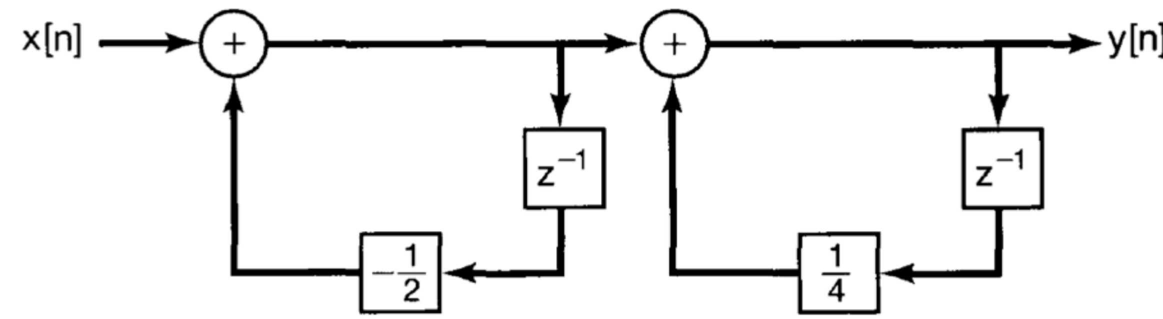
- Ejemplo 10.30

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

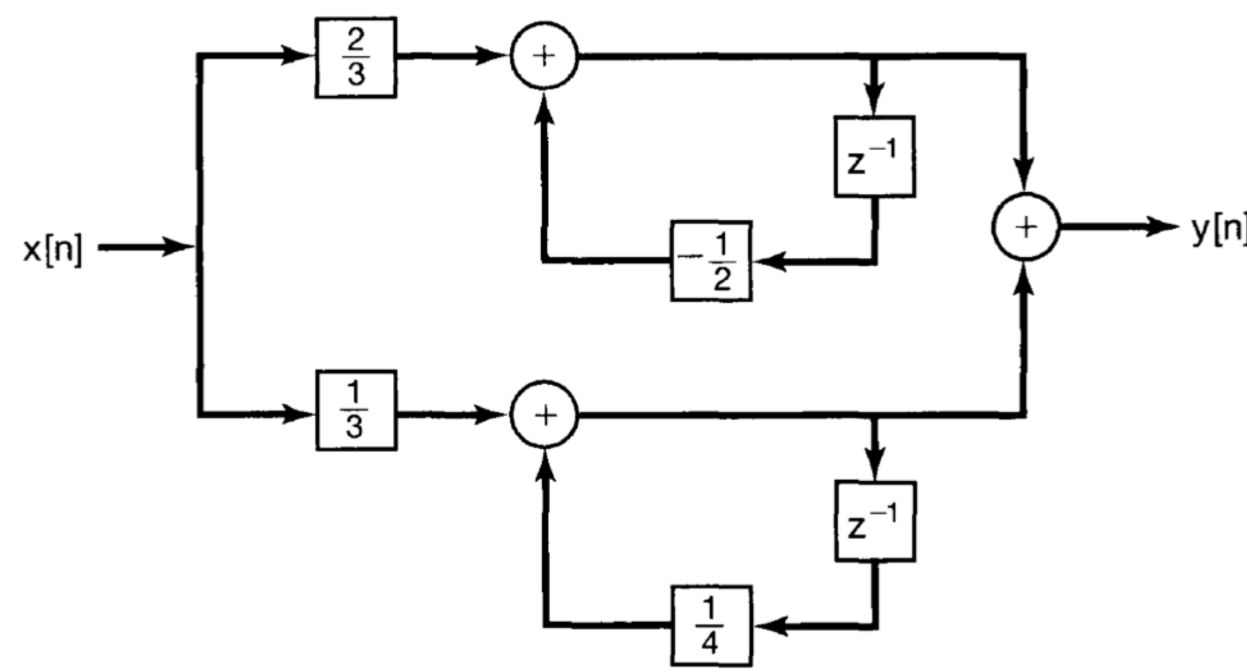
$$H(z) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$



(a) Forma directa



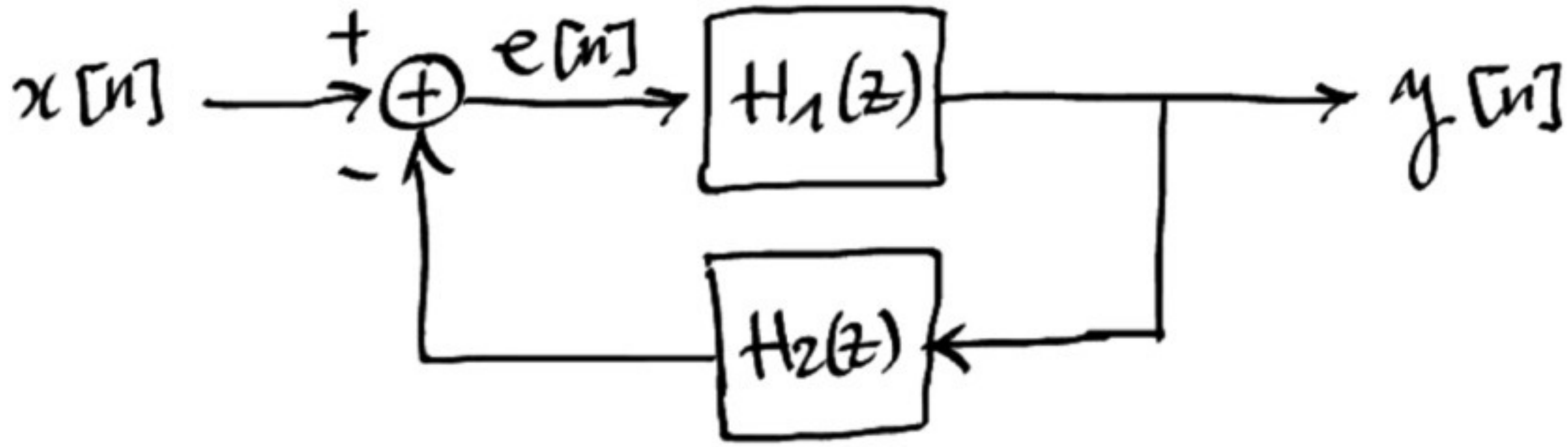
(b) Forma cascada



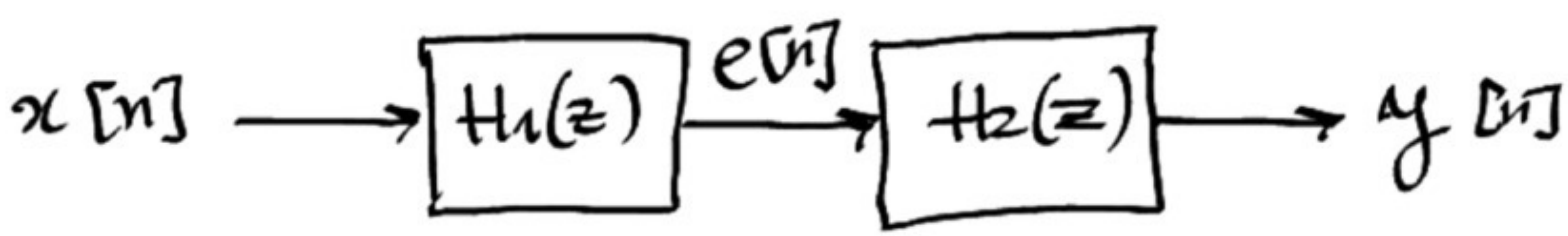
(c) Forma paralela

Representación de SLITs por diagramas de bloques

Además tenemos las relaciones de sistemas en serie y paralelo



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)\,H_2(z)}$$



$$H(z) = H_1(z)\,H_2(z)$$

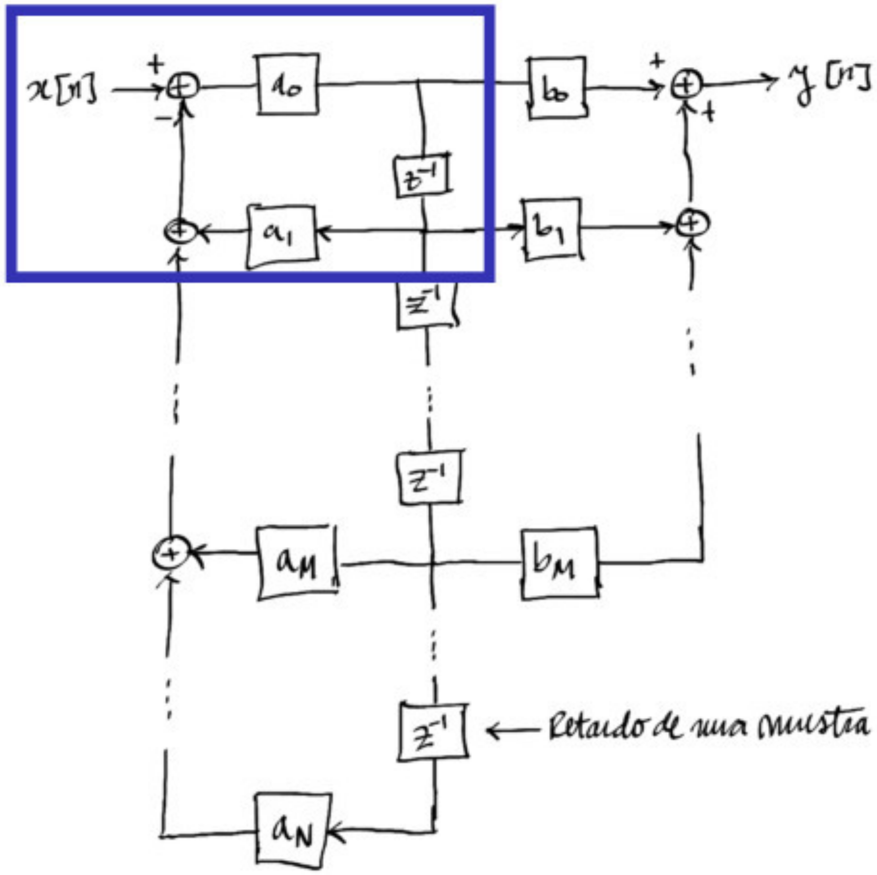
SLITs y ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

Veamos un sistema de la forma: $y[n] - a\,y[n-1] = x[n]$
causal de primer orden

$$Y(z) - a z^{-1} Y(z) = X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

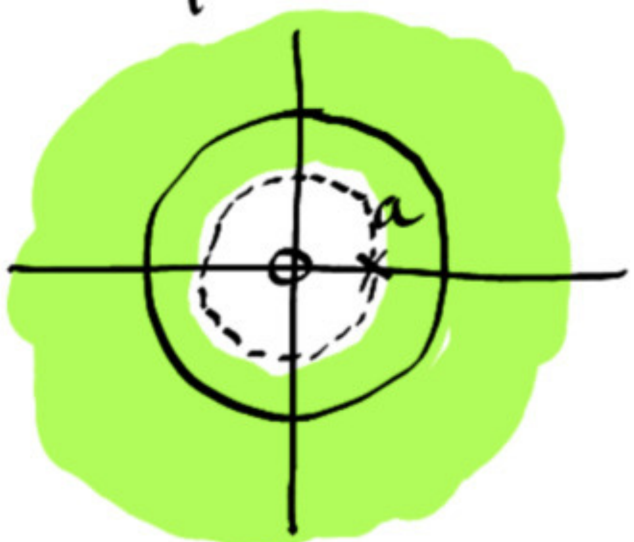
Como sabemos que es causal debe ser la ROC: $|z| > |a|$ Polo en $z = a$

Invertimos TZ: $h[n] = a^n u[n]$



SLITs y ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

Para que sea estable necesitamos que $|a|<1$ y $S^1 \subset$ ROC



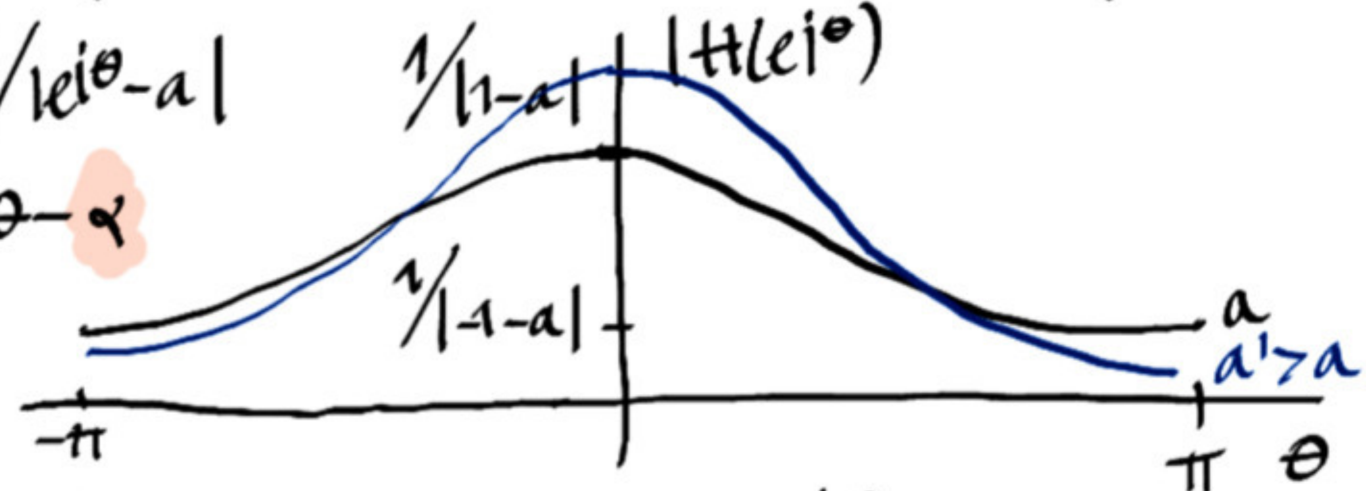
$\Rightarrow \exists$ TF y vale

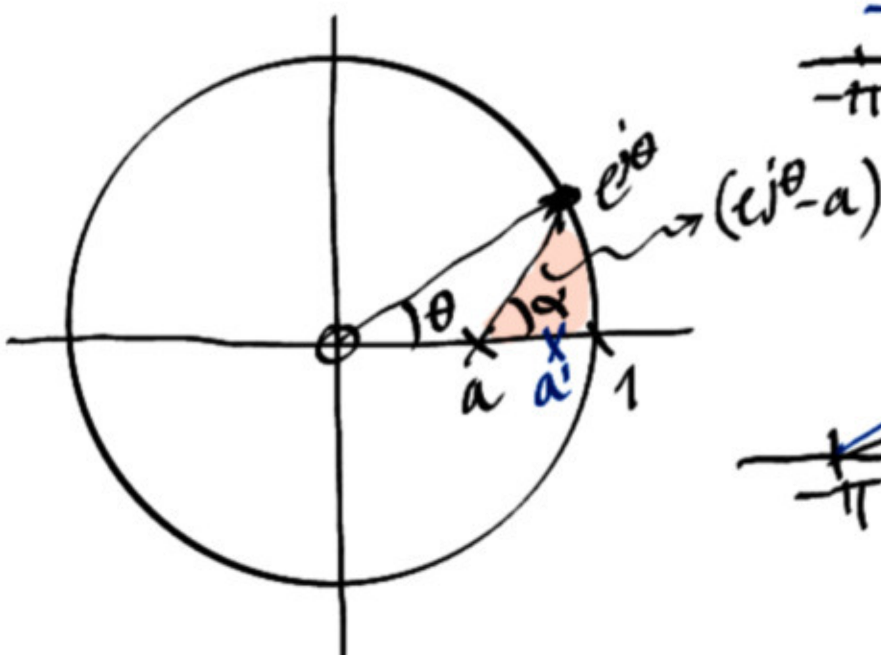
$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1-a e^{-j\theta}} = \frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta}-a}$$

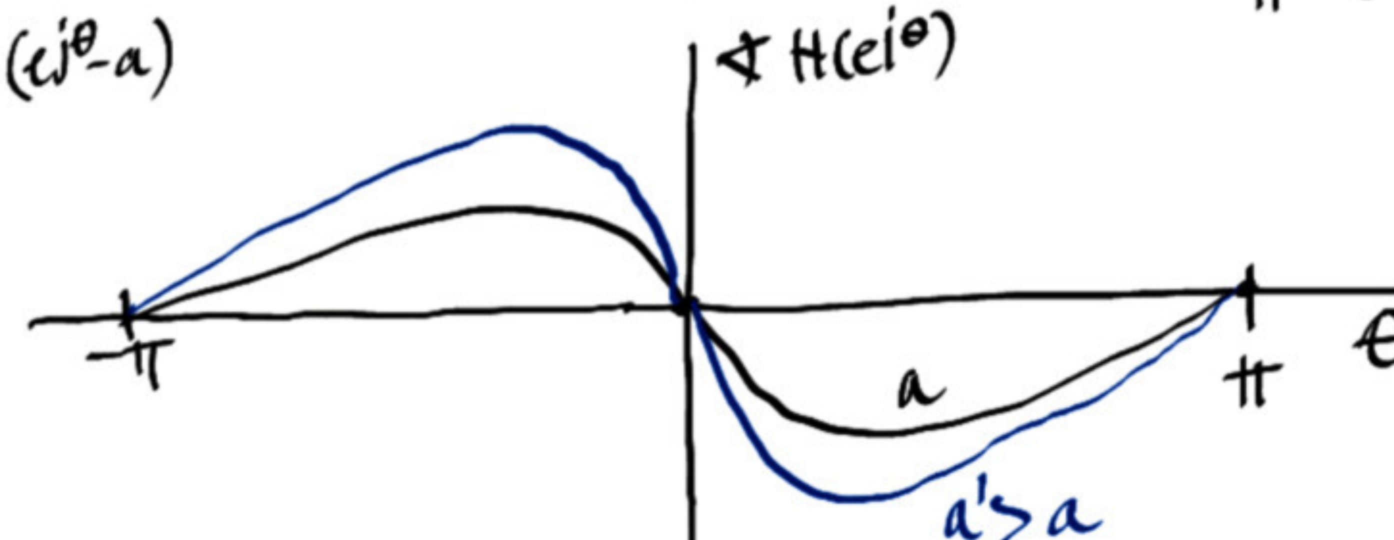
Hagamos el análisis de módulo y fase

$$|H(e^{j\theta})| = |e^{j\theta}| / |e^{j\theta}-a| = 1/|e^{j\theta}-a|$$

$$\measuredangle H(e^{j\theta}) = \measuredangle e^{j\theta} - \measuredangle(e^{j\theta}-a) = \theta - \alpha$$







SLITs y ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

Veamos un sistema de segundo orden causal

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = x[n]$$

$$Y(z)\left(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\right) = X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

con dos polos reales o dos polos complejos conjugados.

$$= \frac{A}{(z - z_1)} + \frac{B}{(z - z_2)}$$

e invertimos en ROC: $|z| > \max\{|z_1|, |z_2|\}$ y obtenemos $h[n]$ causal.

Si $\max\{|z_1|, |z_2|\} < 1 \Rightarrow h[n]$ es estable y $\exists$ TF

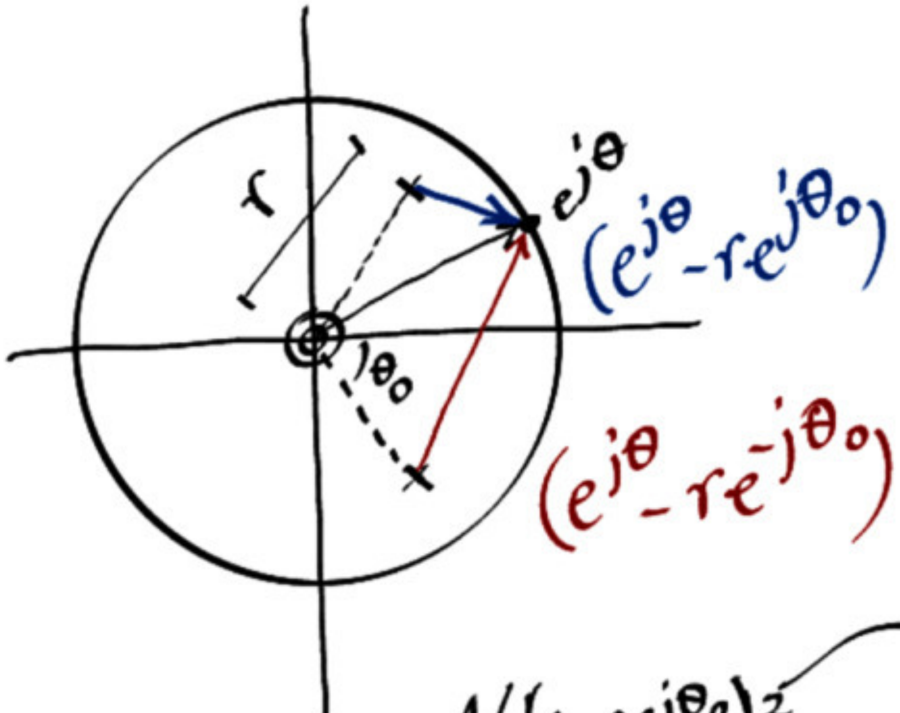
Asumamos en general $z_1 = re^{j\theta_0}$ y $z_2 = re^{-j\theta_0}$ en el caso complejos conj.

con $0 < r < 1$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{e^{2j\theta}}{(e^{j\theta} - re^{j\theta_0})(e^{j\theta} - re^{-j\theta_0})}$$

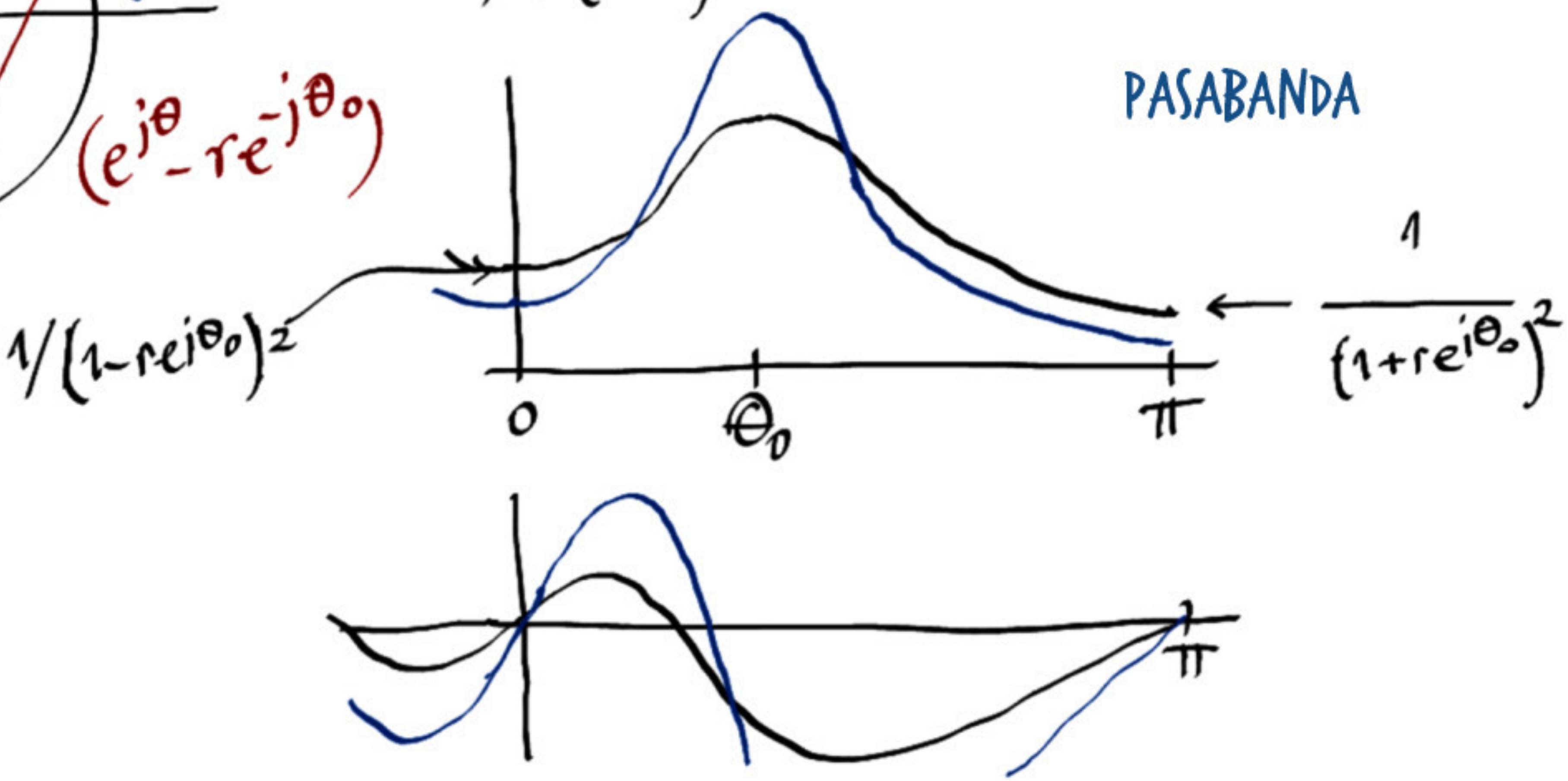
SLITs y ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

$$H(e^{j\theta}) = \frac{e^{2j\theta}}{(e^{j\theta} - re^{j\theta_0})(e^{j\theta} - re^{-j\theta_0})}$$



$$|H(e^{j\theta})| = |e^{j2\theta}|\,|e^{j\theta} - re^{j\theta_0}|^{-1}\,|e^{j\theta} - re^{-j\theta_0}|^{-1}$$

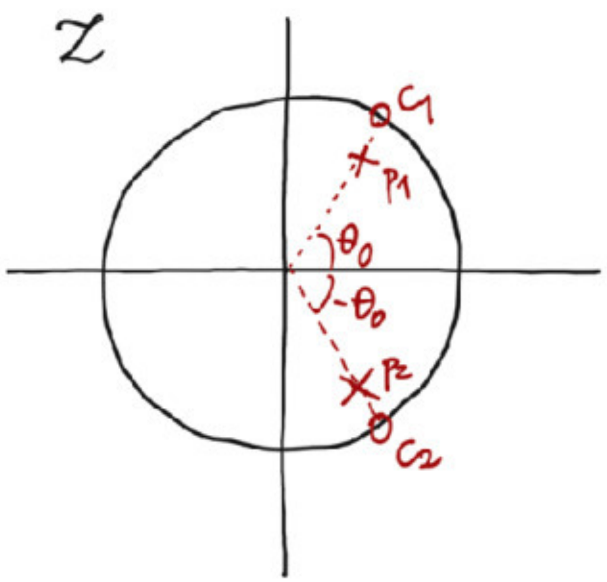
$$\measuredangle H(e^{j\theta}) = 2\theta - \measuredangle(e^{j\theta} - re^{j\theta_0}) - \measuredangle(e^{j\theta} - re^{-j\theta_0})$$



Análisis de un filtro notch

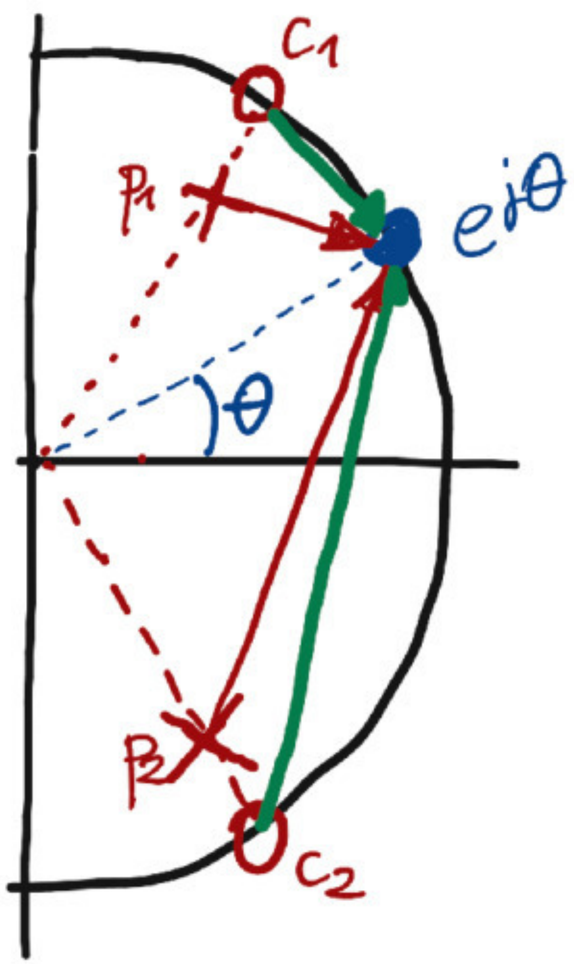
Análisis de un filtro notch

- Notch: elimina una frecuencia (*bandstop* muy selectivo)

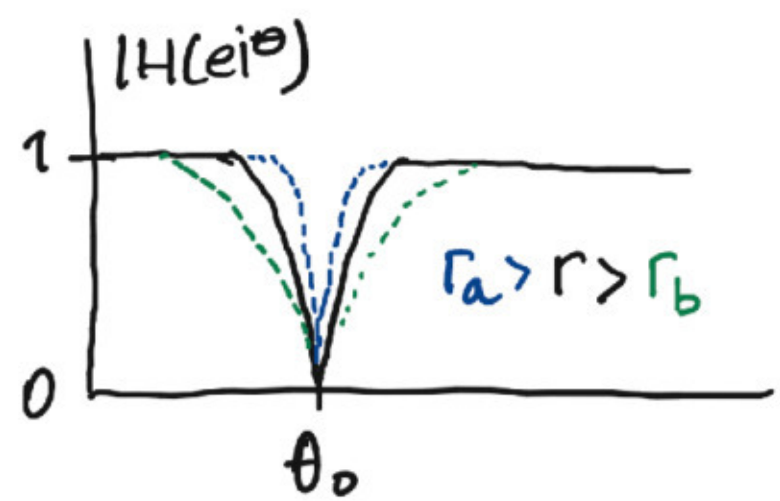


$$H(e^{j\theta}) = \frac{(e^{j\theta} - c_1)(e^{j\theta} - c_2)}{(e^{j\theta} - p_1)(e^{j\theta} - p_2)}$$

$$c_1 = e^{j\theta_0}, c_2 = e^{-j\theta_0}$$
$$p_1 = re^{j\theta_0}, p_2 = re^{-j\theta_0}$$



- Si $r \simeq 1$ los vectores de polos y ceros serán similares en general y $H(e^{j\theta}) \simeq 1$
- Cuando $\theta = \theta_0$ tendremos $H(e^{j\theta}) = 0$.
- Dependiendo de r tendremos mayor selectividad en frecuencia.
- La fase será 0 y tendrá saltos de $\pm\pi$ en ceros y polos que se cancelarán.



Propiedades de la Transformada Z

Section	Property	Signal	z-Transform	ROC
		$x[n]$	$X(z)$	R
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
10.5.1	Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
10.5.2	Time shifting	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R, except for the possible addition or deletion of the origin
10.5.3	Scaling in the z-domain	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$	R
		$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
		$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	Scaled version of R (i.e., $\|a\|R$ = the set of points $\{\|a\|z\}$ for z in R)
10.5.4	Time reversal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	Inverted R (i.e., R^{-1} = the set of points z^{-1}, where z is in R)
10.5.5	Time expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ for some integer r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (i.e., the set of points $z^{1/k}$, where z is in R)
10.5.6	Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
10.5.7	Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
10.5.7	First difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	At least the intersection of R and $\|z\| > 0$
10.5.7	Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	At least the intersection of R and $\|z\| > 1$
10.5.8	Differentiation in the z-domain	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R
10.5.9		Initial Value Theorem If $x[n] = 0$ for $n < 0$, then $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$		

Algunos pares de transformadas Z

Signal	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z, except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
6. $-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
7. $n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
8. $-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1 - [\cos\omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos\omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos\omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1 - [r\cos\omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos\omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos\omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

Y a la hoja de fórmulas...

Transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \qquad x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

donde C es una curva antihoraria en la regiōn de convergencia y que envuelve al origen.

Secuencia	Transformada Z	ROC
$ax[n] + by[n]$	$aX(z) + bY(z)$	contiene $R_x \cap R_y$
$x[n - n_o]$	$z^{-n_o}X(z)$	R_x, quizā ± 0 ō ∞
$z_o^n x[n]$	$X(z/z_o)$	$\vert z_o\vert R_x$
$n^k x[n]$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^k X(z)$	R_x, quizā ± 0 ō ∞
$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
$(x * y)[n]$	$X(z)Y(z)$	contiene $R_x \cap R_y$
$\delta[n]$	1	$\forall z$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\vert z\vert > \vert a\vert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\vert z\vert < \vert a\vert$
$\delta[n - n_o]$	z^{-n_o}	$\forall z$ excepto 0 ō ∞
$\cos(\omega_o n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_o}{1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2}}$	$\vert z\vert > 1$
$\sin(\omega_o n)u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_o}{1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2}}$	$\vert z\vert > 1$

Transformada Z unilateral

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$x[n] \longleftrightarrow X_u(z)$$

$$x[n + n_o] \longleftrightarrow z^{n_o}X_u(z) - x[0]z^{n_o} - \cdots - x[n_o - 1]z$$

$$x[n - n_o] \longleftrightarrow z^{-n_o}X_u(z) + x[-1]z^{-n_o+1} + \cdots + x[-n_o]$$

Teorema de valor inicial: $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$