



Teoría de Lenguajes

Autómatas Push-Down



Gramáticas Libres de Contexto

$$G = (V, T, P, S)$$

Es un formalismo para especificar lenguajes

- V : conjunto finito de variables
- T : conjunto finito de terminales ($T \equiv \Sigma$)
- P : conjunto de reglas de producción
- S : símbolo inicial $S \in V$

$$A \rightarrow \alpha \quad / \quad \alpha \in (V \cup T)^*$$

$$A \in V$$

Lenguaje Libre de Contexto

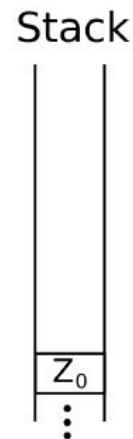
Es aquél que puede ser generado por una gramática libre de contexto
 $G:(V,T,P,S)$

$$L(G) = \{ x \in T^* / S \xRightarrow{*} x \}$$

Autómata Push-Down

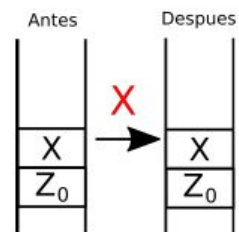
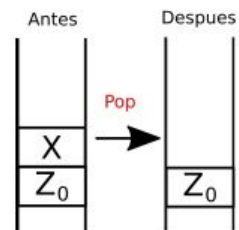
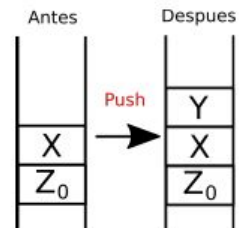
Es un autómata $M : (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ donde :

- Q - Conjunto finito de estados
- Σ - Alfabeto de entrada
- Γ - Alfabeto del stack
- δ - Función de transición
- q_0 - Estado inicial
- Z_0 - Simbol inicial de la stack
- F - Conjunto de estados finales



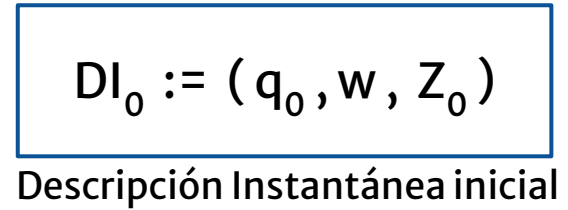
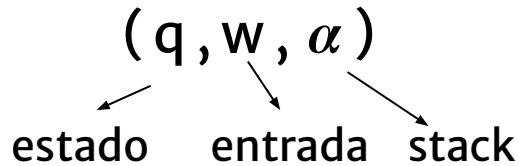
Autómata Push-Down

- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$
- $\delta(q, a, X) = \{\{p_1, \alpha_1\}, \{p_2, \alpha_2\}, \dots, \{p_n, \alpha_n\}\}$
- α_j es de la forma:
 - YX
 - ε
 - X (Queda como estaba)



Autómata Push-Down

Descripción instantánea



Ejemplos:

- $\delta(q, a, X) = \{(p_1, \beta_1), \dots, (p_k, \beta_k)\} \Rightarrow (q, ay, X\theta) \vdash (p_2, y, \beta_2\theta)$

- $\delta(q, \varepsilon, X) = \{(p_1, \beta_1), \dots, (p_k, \beta_k)\} \Rightarrow (q, ay, X\theta) \vdash (p_2, ay, \beta_2\theta)$

antes de la transición

después de ejecutarla

$\theta \in \Gamma^*$

Autómata Push-Down

Dado $M : (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

Lenguaje aceptado por estado final

$$L(M) = \{x, x \in \Sigma^* / (q_0, x, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha), q \in F, \alpha \in \Gamma^*\}$$

Lenguaje aceptado por stack vacío

$$L(M) = \{x, x \in \Sigma^* / (q_0, x, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon), p \in Q\}$$

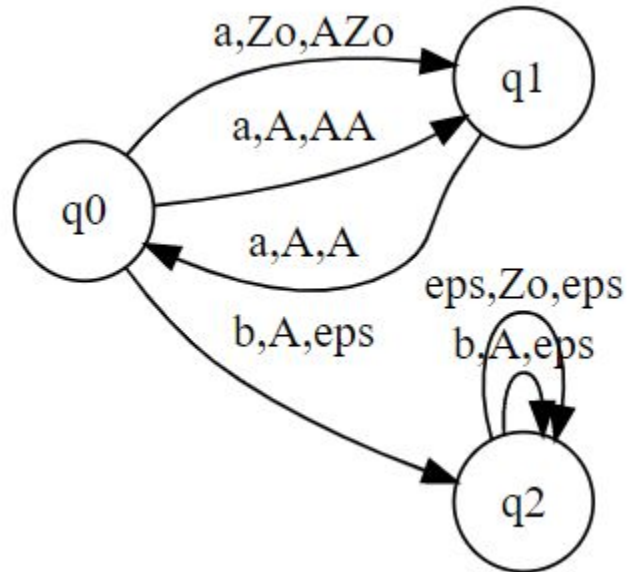
Autómata Push-Down Determinista

Dado $M : (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

- $\forall q \in Q$ y $Z \in \Gamma$: si $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset \Rightarrow \forall a \in \Sigma, \delta(q, a, Z) = \emptyset$
- $\forall q \in Q, Z \in \Gamma$ y $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ / $\#(\delta(q, a, Z)) \leq 1$

Ejemplo

Sea $L = \{x / x \in \{a,b\}^* \text{ y es de la forma } a^{2k}b^k, k > 0\}$

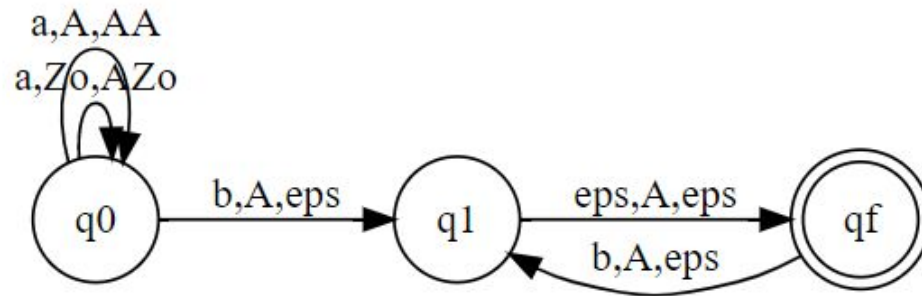


Transiciones épsilon

Son aquellas que me permiten modificar el stack y eventualmente cambiar de estado SIN consumir un símbolo de la tira

Ejemplo de uso:

$L = \{ x / x \in \{a,b\}^* \text{ y es de la forma } a^{2k}b^k, k > 0 \}$



Equivalencia de modelos

Todo APD que acepta un lenguaje por estado final, tiene un APD equivalente (acepta el mismo lenguaje) por stack vacío y recíprocamente

Equivalencia de modelos

APD $M: (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F) \rightarrow$ APD $M': (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, Z'_0, \emptyset)$

- Definimos otro stack (un nuevo tope: Z'_0) [$\Gamma' = \Gamma \cup \{Z'_0\}$]
- Hacemos “push” del Z_0 en este nuevo stack: $\delta'(q'_0, \varepsilon, Z'_0) = (q_0, Z_0 Z'_0)$
- Entramos en las transiciones de δ : $\delta'(q, a, X) = \delta(q, a, X)$ [$Q' = Q \cup \{q'_0, q'_s\}$]
- $\forall q \in F: \delta'(q, \varepsilon, X) = (q'_s, \varepsilon) \quad \forall X \in \Gamma$ (incluido Z_0)
 $\delta'(q'_s, \varepsilon, X) = (q'_s, \varepsilon) \quad \forall X \in \Gamma'$ (incluido Z'_0)

Equivalencia de modelos

APD $M: (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_o, Z_o, \emptyset) \rightarrow$ APD $M': (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_o, Z'_o, \{q'_f\})$

- Definimos otro stack (un nuevo tope: Z'_o) [$\Gamma' = \Gamma \cup \{Z'_o\}$]
- Hacemos “push” del Z_o en este nuevo stack: $\delta'(q'_o, \varepsilon, Z'_o) = (q_o, Z_o Z'_o)$
- Entramos en las transiciones de δ : $\delta'(q, a, X) = \delta(q, a, X)$ [$Q' = Q \cup \{q'_o, q'_f\}$]
- $\forall q \in Q: \delta'(q, \varepsilon, Z'_o) = (q'_f, \varepsilon)$ $\forall q \in Q$

Equivalencia entre Gramáticas y Autómatas

Todo lenguaje generado por una gramática libre de contexto tiene asociado un APD (por stack vacío) que lo reconoce y recíprocamente

(\Rightarrow)

$L=L(G)$, $G:(V,T,P,S)$ Libre de Contexto (en FNG) $\Rightarrow L=L(M)$, $M:(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

- M simula derivaciones de más a la izquierda de G

Equivalencia entre Gramáticas y Autómatas

Todo lenguaje generado por una gramática libre de contexto tiene asociado un APD (por stack vacío) que lo reconoce y recíprocamente

(\Leftarrow)

$L=L(M), M:(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset) \Rightarrow L=L(G), G:(V, T, P, S)$ Libre de Contexto

- Las reglas se construyen a partir de las transiciones