Comunicaciones Digitales

Práctico 8

Teoría de la Información: capacidad del canal

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil.

★ Ejercicio 1

Probaremos que para un canal discreto y sin memoria (DMC) se cumple que:

$$I\{\mathbf{X}^n; \mathbf{Y}^n\} \leq \sum_k I\{X_k; Y_k\},$$

y que la igualdad se da cuando los X_k son independientes.

(a) Pruebe que para un DMC se cumple que

$$H\{\mathbf{Y}^n\} \leq \sum_k H\{Y_k\}.$$

(b) Pruebe que para un DMC también se cumple que

$$H\{\mathbf{X}^n|\mathbf{Y}^n\} = \sum_{k=1}^{n} H\{X_k|Y_k\}.$$

(c) Termine la demostración utilizando los dos resultados anteriores.

★ Ejercicio 2 (2.20)

Considere una símblo aleatorio X de alfabeto $\{1, 2, \ldots, M\}$ y distribución de probabilidad $\{p_1, p_2, \ldots, p_M\}$. El objetivo de este ejercicio es llegar a una cota estrechamente relacionada con la desigualdad de Fano, entre la entropía $H\{X\}$ y la probabilidad p_1 del primer símbolo.
Sea Y un símbolo aleatorio que vale 1 si $X = 1$ y 0 en otro caso.

(a) Exprese $H\{Y\}$ en términos de la entropía binaria $\Omega(\alpha) = -\alpha \log(\alpha) - (1-\alpha) \log(1-\alpha)$.

(b) ¿Cuánto vale la entropía condicional $H\{X|Y = 1\}$?

(c) Muestre que $H\{X|Y = 0\} \leq \log(M - 1)$, y muestre que es posible lograr la igualdad eligiendo correctamente los valores $p_2, \ldots, p_M$.

(d) Combine los resultados de las dos partes anteriores para lograr una cota superior de $H\{X|Y\}$.

(e) Encuentre la relación entre $H\{X\}$ y $H\{X, Y\}$.

(f) Use $H\{Y\}$ y $H\{X|Y\}$ para lograr una cota superior de $H\{X\}$, y muestre que es posible lograr la igualdad eligiendo correctamente los valores de $p_2, \ldots, p_M$.

(g) Para el mismo valor de M que se ha venido usando hasta el momento, sean $p_1, \ldots, p_M$ arbitrarios, y sea $p_{max} = max\{p_1, \ldots, p_M\}$. ¿Es la cota hallada en la parte anterior aun válida si reemplaza p_1 por p_{max}? Justifique su respuesta.

⋆ Ejercicio 3

Se pretende transmitir imágenes de televisión digital a partir de una fuente que genera una matriz de 640×480 elementos de imagen (píxeles), donde cada pixel puede tomar 32 valores de intensidad. Suponga que se generan 30 imágenes por segundo. Todos los píxeles se consideran independientes, y los niveles de intensidad equiprobables.

(a) Hallar la velocidad de transferencia de información $R(bit/s)$.

(b) Hallar la capacidad del canal en bits por símbolo, o bits por uso del canal, si la SNR_R vale 35 dB.

(c) ¿Qué pasa si transmitimos en fase y cuadratura? Por ejemplo una modulación QAM.

(d) Si utilizamos una ancho de banda de 6 MHz, y transmitimos en fase y cuadratura, hallar la capacidad del canal en bits por segundo. ¿La transmisión planteada es viable?

(e) En rigor la norma ITU-R BT.601, que define los mecanismos para digitalizar señales de televisión en calidad estándar, plantea el uso de 864×625 píxeles, a una tasa de 25 cuadros por segundo. Se utilizan 10 bits por píxel de luminancia (blanco y negro) y otros 10 bits para enviar la información de color. ¿Qué bitrate total lograría un sistema real? Discuta el resultado.

Solución

Ejercicio 1

(a) En primer lugar recordemos que la entropía condicional será siempre menor o igual a la entropía:

$$H\{X_2|X_1\} \leq H\{X_2\},$$

y que la igualdad se da cuando X_1 e X_2 son independientes (condicionar a lo sumo reproduce la entropía). Luego recordemos la regla de la cadena para la entropía[1]:

$$H\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = \sum_{k=1}^{n} H\{X_k|X_{k-1}, \ldots, X_1\}$$

Tomando en cuenta ambos resultados anteriores se llega fácilmente a que:

$$H\{\mathbf{X}^n\} = \sum_{k=1}^{n} H\{X_k|X_{k-1}, \ldots, X_1\} \leq \sum_{k=1}^{n} H\{X_k\}$$

Para un canal discreto y sin memoria, cada una de las salidas Y_k dependerá únicamente del valor de X_k enviado, entonces:

$$H\{\mathbf{Y}^n\} = \sum_{k=1}^{n} H\{Y_k|Y_{k-1}, \ldots, Y_1\} \leq \sum_{k=1}^{n} H\{Y_k\},$$

y la igualdad se dará si los Y_k son independientes, cosa que sucederá si los X_k lo son.

(b)

$$\begin{aligned}
H\{\mathbf{X}^n|\mathbf{Y}^n\} &= -E\{log_2 P(\mathbf{X}^n|\mathbf{Y}^n)\} \\
&= -\sum_{\mathbf{X}^n,\mathbf{Y}^n} P(\mathbf{X}^n, \mathbf{Y}^n) log_2 P(\mathbf{X}^n|\mathbf{Y}^n) \\
&= -\sum_{\mathbf{X}^n,\mathbf{Y}^n} P(\mathbf{X}^n, \mathbf{Y}^n) log_2 \Pi_k P(X_k|Y_k) \\
&= -\sum_{\mathbf{X}^n,\mathbf{Y}^n} P(\mathbf{X}^n, \mathbf{Y}^n) \sum_k log_2 P(X_k|Y_k) \\
&= -\sum_{\mathbf{X}^n,\mathbf{Y}^n} \sum_k P(\mathbf{X}^n, \mathbf{Y}^n) log_2 P(X_k|Y_k) \\
&= -\sum_k \sum_{\mathbf{X}^n,\mathbf{Y}^n} P(\mathbf{X}^n, \mathbf{Y}^n) log_2 P(X_k|Y_k) \\
&= -\sum_k E\{log_2 P(X_k|Y_k)\} = \sum_k H\{X_k|Y_k\}
\end{aligned}$$

[1] Thomas M. Cover, Joy A. Thomas, "Elements of Information Theory, 2nd edition". Teorema 2.5.1.

(c) Combinando los resultados anteriores

$$I\{\mathbf{X}^n;\mathbf{Y}^n\} = H\{\mathbf{Y}^n\} - H\{\mathbf{X}^n|\mathbf{Y}^n\} \tag{1}$$

$$\leq \sum_k H\{Y_k\} - \sum_k H\{X_k|Y_k\} = \sum_k I\{X_k;Y_k\} \tag{2}$$

Ejercicio 2

(a)

$$H\{Y\} = -p_y(y=1)logp_y(y=1) - p_y(y=0)logp_y(y=0)$$

$$p_y(y=1) = p_1$$

$$p_y(y=0) = p_2 + p_3 + ... + p_M = (1-p_1)$$

$$H\{Y\} = -p_1 logp_1 - (1-p_1)log(1-p1) = \Omega(p_1)$$

$$H\{Y\} = \Omega(p_1)$$

(b)

$H\{X|Y=1\} = 0 \Rightarrow$ El valor de x es perfectamente conocido

(c) La entropía es máxima si las $p(x=k|y=0)$ son equiprobables. Entonces se cumple:

$$H\{X|Y=0\} = -\sum_{k=2}^{M} p_k logp_k \leq \sum_{k=2}^{M} \frac{1}{M-1} log(\frac{1}{M-1})$$

$$\Rightarrow H\{X|Y=0\} \leq \frac{M-1}{M-1} log(M-1) = log(M-1)$$

(d) Tomando en cuenta las partes b y c, y sabiendo que $H\{X|Y\} = \sum_i p(Y = y_i)H\{X|Y=y_i\}$ tenemos que:

$$H\{X|Y\} = p_1 H\{X|Y=1\} + (1-p_1)H\{X|Y=0\} \leq (1-p_1)log(M-1)$$

(e)

$$H\{X;Y\} = H\{Y\} + H\{X|Y\}$$

(f)

$$H\{Y\} + H\{X|Y\} = H\{X\} + H\{Y|X\}$$

$$H\{X\} - H\{X|Y\} + H\{Y\} - H\{Y|X\}$$

$$H\{X\} \leq (1-p_1)log(M-1) + H\{Y\} - H\{Y|X\}$$

$$H\{X\} \leq (1-p_1)log(M-1) + \Omega(p_1)$$

(g) El mismo análisis aplica reemplazando p_1 por $p_k \forall j \in [1, M]$. Entonces también aplica a p_{max}.

Ejercicio 3

(a) La velocidad de transferencia de información es:

$$R = 5\frac{bit}{pixel} \times 640 \times 480 \frac{pixel}{cuadro} \times 30 \frac{cuadros}{seg} = 46.08 \frac{Mbit}{seg}$$

(b) La capacidad de un canal analógico es:

$$C = \frac{1}{2}\log_2(SNR_R + 1) = \frac{1}{2}\log_2(10^{3,5} + 1) \approx 5.8 \frac{bits}{simbolo}$$

(c) Hay que estudiar la capacidad de cada transmisión de manera independiente.

(d) Debemos calcular ahora la capacidad en bits por segundo:

$$C_t = 2\times\frac{r_s}{2}\log_2(SNR_R+1) = 2\times\frac{B_T}{2}\log_2(SNR_R+1) = 6MHz \log_2(10^{3,5}+1) \approx 69.76 \frac{Mbit}{seg}$$

Por lo que este ancho de banda sería suficiente para enviar TV blanco y negro con 32 niveles por píxel.

(e)

$$R = (10 + 10)\frac{bit}{pixel} \times 864 \times 625 \frac{pixel}{cuadro} \times 25 \frac{cuadros}{seg} = 270 \frac{Mbit}{seg}$$