

# COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES

## Torsión

Año 2024



**ANEP**

ADMINISTRACIÓN  
NACIONAL DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

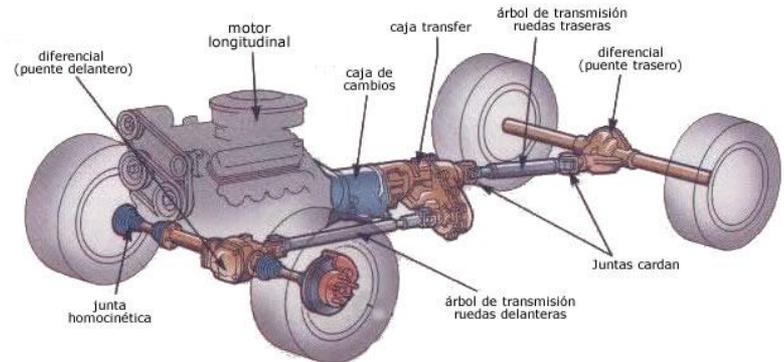
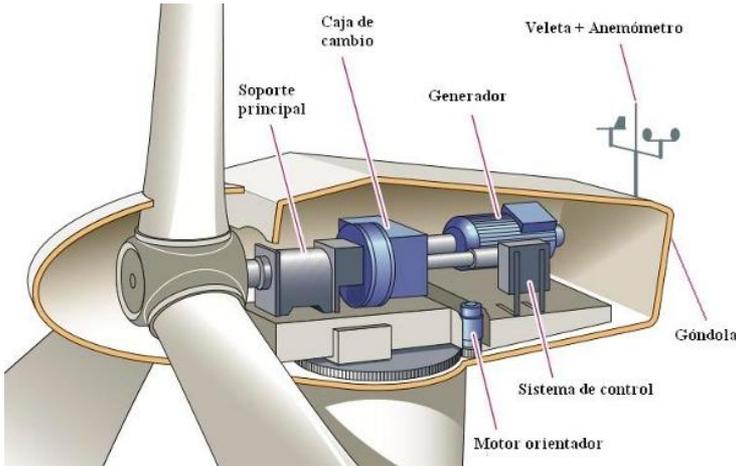
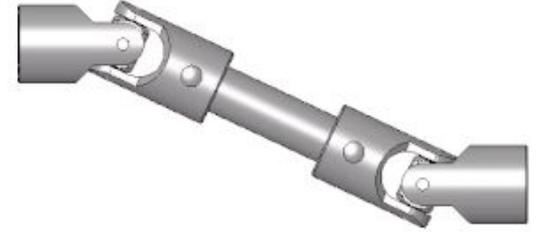
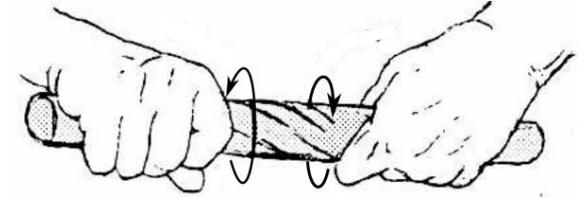


**IIMPI**  
INSTITUTO DE  
INGENIERÍA, MECÁNICA  
Y PRODUCCIÓN INDUSTRIAL

# Introducción

Anteriormente estudiamos cuál es el resultado de ejercer cargas axiales sobre elementos estructurales. Ahora analizaremos qué ocurre cuando ejercemos una **torsión** sobre elementos con simetría de revolución.

Existen una infinidad de ejemplos, pero su utilización más popular es la de **transmitir potencia**.

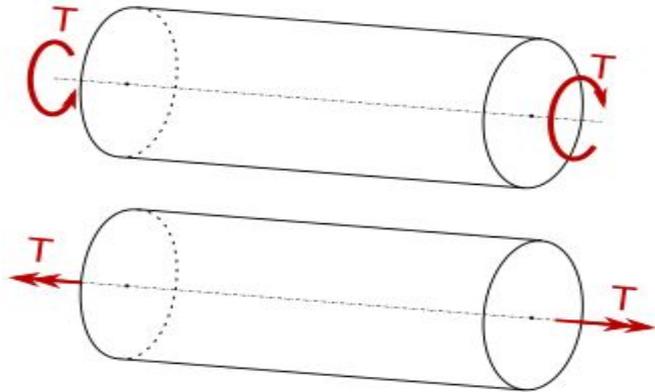


# Definición

Una carga torsional es un momento (o un par torsor) dirigido según el **eje axial** de la pieza.

Este fenómeno se puede encontrar en piezas con una dirección principal y cuya sección transversal no siempre presenta simetría de revolución.

Sin embargo, como su principal aplicación es la transmisión de potencia, estos elementos suelen ser **ejes cilíndricos**, macizos o huecos.

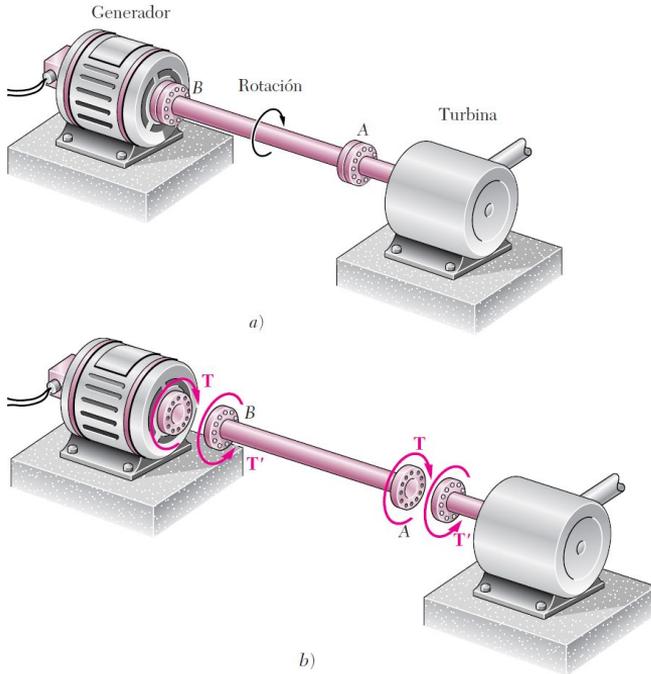


Los momentos se representan de alguna de estas dos formas:

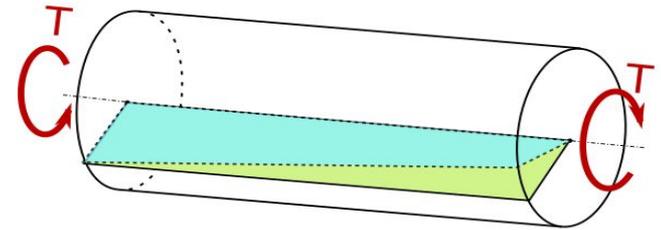
- 1) flecha curva alrededor de un eje indicando el sentido del momento.
- 2) flecha doble en dirección del eje del momento siguiendo la regla de la mano derecha.

# Análisis de esfuerzos y deformación

Considere el sistema de la figura, en el cual se utiliza un eje para llevar la potencia que genera la turbina en A, hasta el generador en B, con el giro en el sentido indicado.

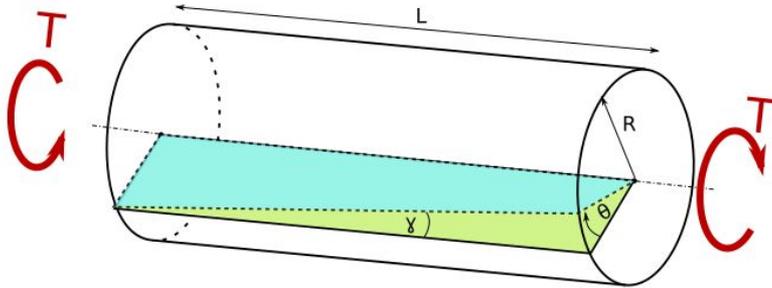


Analizando el sistema como tres componentes separados y despreciando el peso del eje, se puede obtener el DCL del eje AB. Además, por Acción-Reacción se obtienen las cargas que el eje genera sobre el motor y la turbina, en A y B respectivamente.



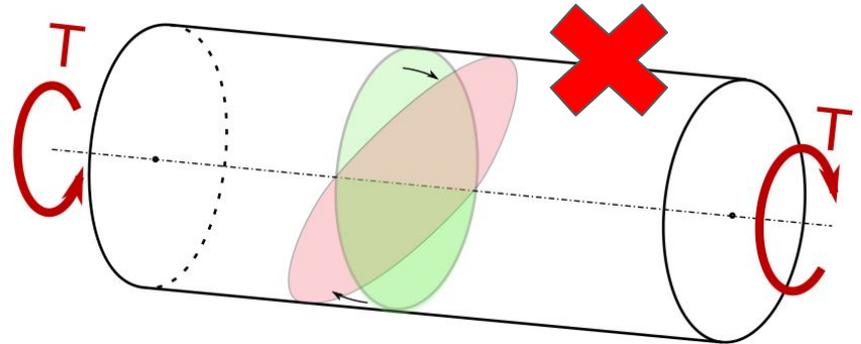
# Análisis de esfuerzos y deformación

Al someter al eje de largo  $L$  y radio  $R$  a una carga de torsión pura  $T$ , éste se deforma como se ve en la figura puesto que es un cuerpo deformable, transformándose el plano verde, en el plano turquesa.



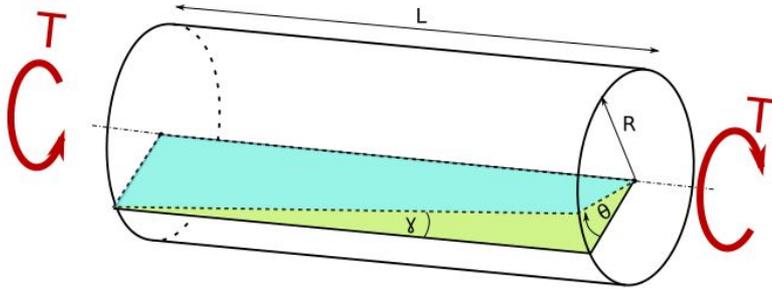
## Hipótesis 1:

Para los casos que estudiaremos que son aquellos con simetría de revolución, se observa experimentalmente que **no se produce "alabeo"**. En otras palabras, esto significa que al deformarse, **todos los puntos se mantienen en el mismo plano que se encontraban previo a la deformación**.



# Análisis de esfuerzos y deformación

Al someter al eje de largo  $L$  y radio  $R$  a una carga de torsión pura  $T$ , éste se deforma como se ve en la figura puesto que es un cuerpo deformable, transformándose el plano verde, en el plano turquesa.



## **Hipótesis 2:**

También se observa en la práctica que, para “**pequeñas deformaciones**” (todos los casos del presente curso), la deformación es “lineal” con el radio  $r$  y con el par torsor  $T$ .

## **Hipótesis 3:**

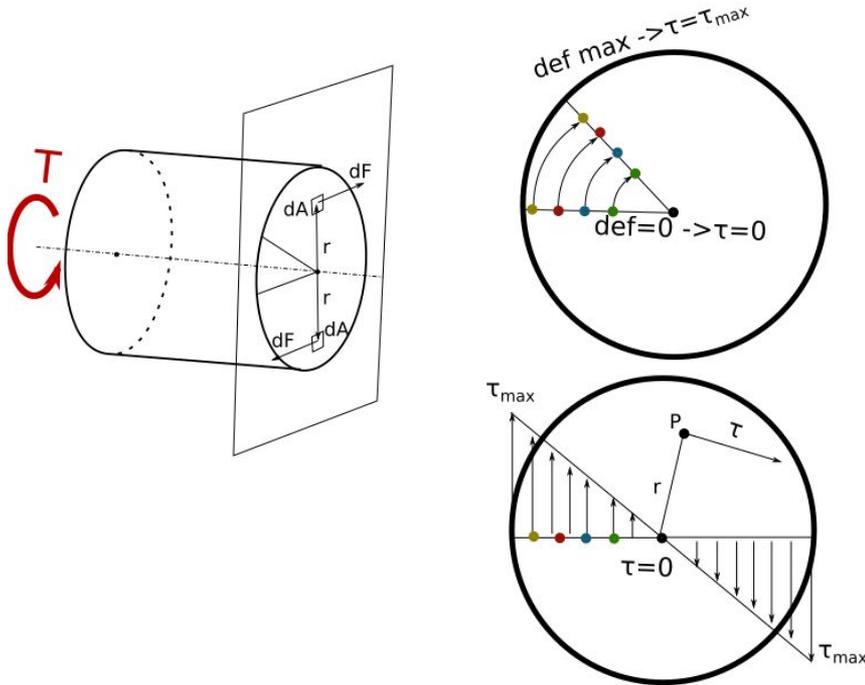
Se cumple la ley de Hooke para la relación entre esfuerzo y deformación.

$$\sigma = \varepsilon E$$

$$\tau = \gamma G$$

# Análisis de esfuerzos y deformación

Recordando que si un cuerpo está en equilibrio, cualquier parte que se aisle del mismo va a permanecer en equilibrio, podemos cortar al eje con un plano, y estudiar cuales son las cargas que aparecen.



Equilibrio:

$$T = \int_A r \frac{dF}{dA} dA = \int_A r \tau dA = \frac{\tau_{max}}{R} \int_A r^2 dA = \frac{\tau_{max}}{R} J$$

Distribución lineal de esfuerzos

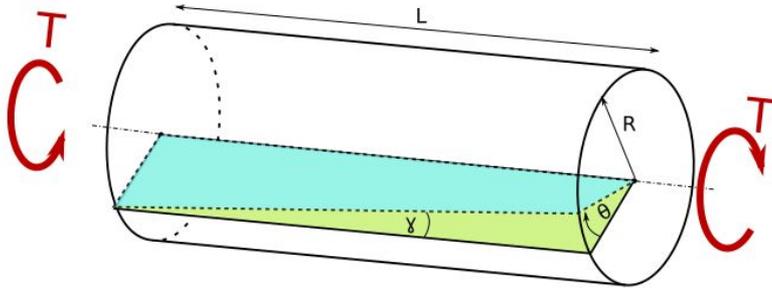
$$\tau(r) = \tau_{max} \frac{r}{R}$$

Esfuerzo por torsión  $T$ , en un punto a  $r$  del eje con momento polar de inercia  $J$ .

$$\tau(r) = \frac{Tr}{J}$$

# Análisis de esfuerzos y deformación

Al someter al eje de largo  $L$  y radio  $R$  a una carga de torsión pura  $T$ , éste se deforma como se ve en la figura puesto que es un cuerpo deformable, transformándose el plano verde, en el plano turquesa.



Utilizando algunas igualdades trigonométricas y las relaciones alcanzadas anteriormente, se puede demostrar que el ángulo  $\theta$  que gira un extremo con respecto al otro se calcula como:

$$\theta = \frac{TL}{GJ}$$

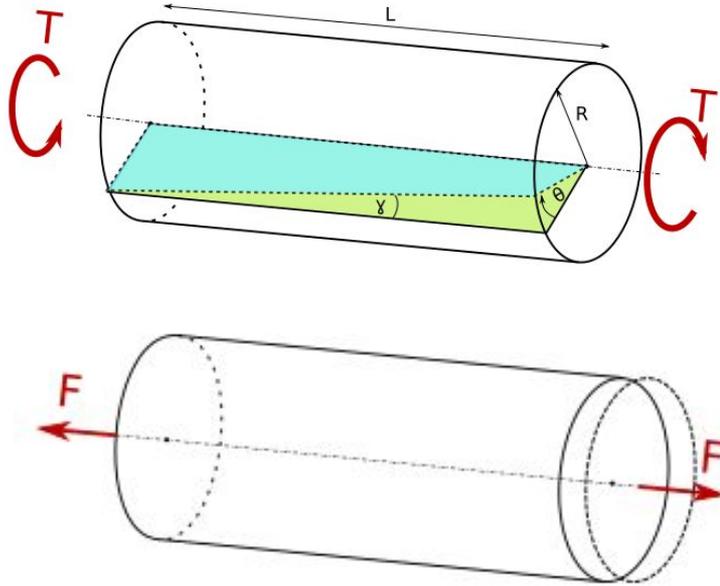
Donde:

$L$  es el largo entre las caras que se desea evaluar el giro.

$G$  es el módulo de elasticidad al corte

# Análisis de esfuerzos y deformación

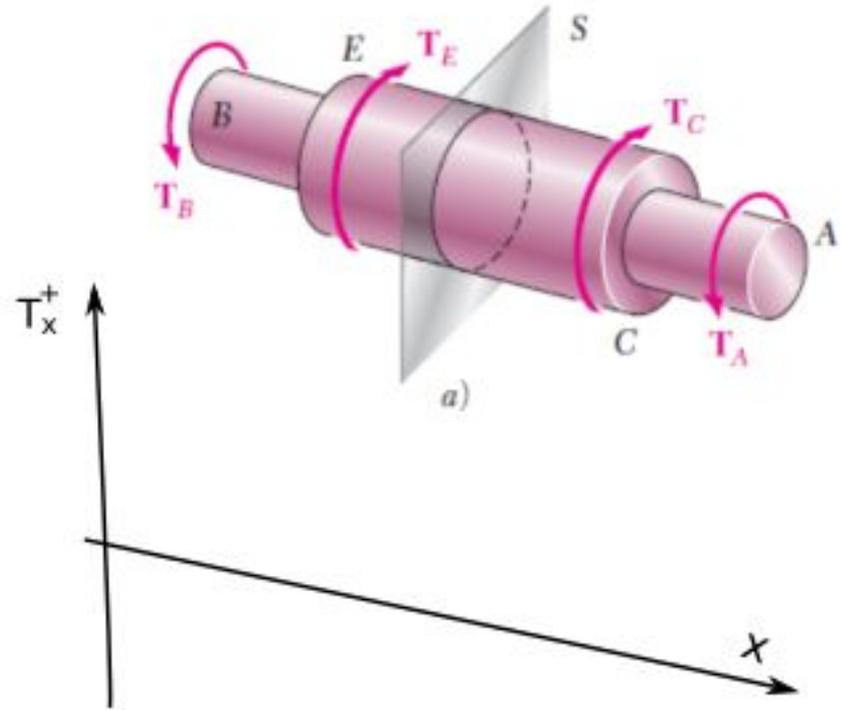
Al someter al eje de largo  $L$  y radio  $R$  a una carga de torsión pura  $T$ , éste se deforma como se ve en la figura puesto que es un cuerpo deformable, transformándose el plano verde, en el plano turquesa.



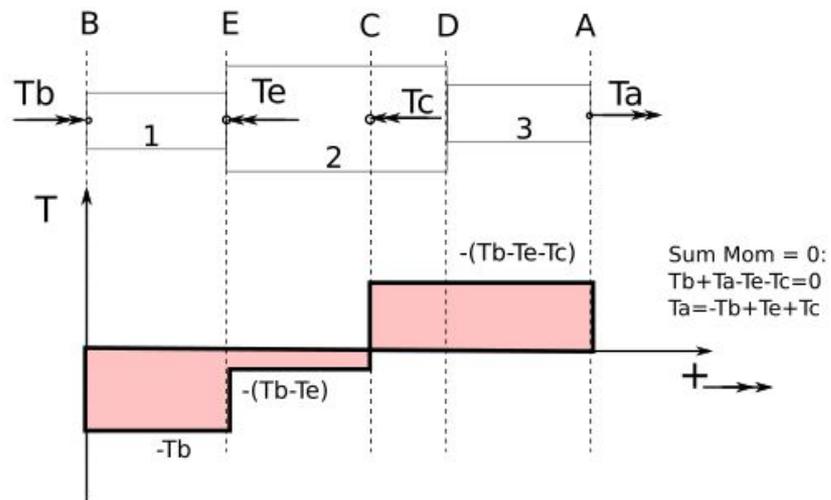
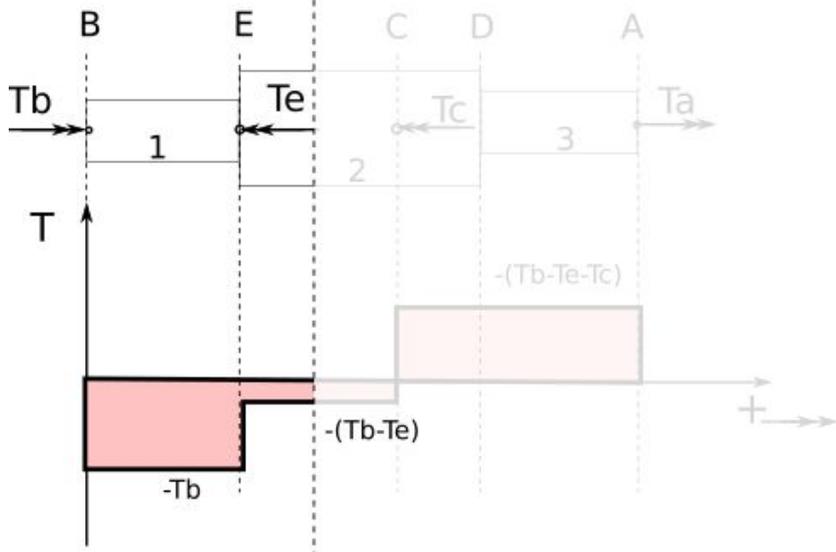
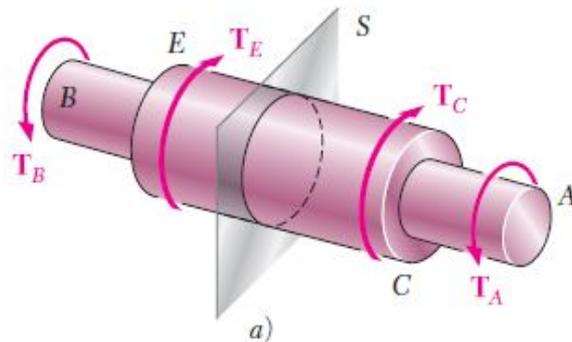
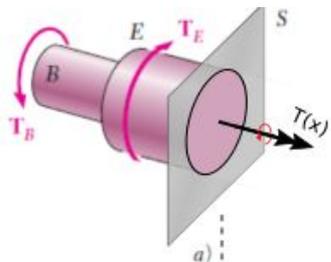
Analogía	Directa	Torsión
Carga	F	T
Prop. Sección	A	J
Prop. Mecánica	E	G
Deformación	$FL/EA$	$TL/GJ$
Esfuerzo	$F/A$	$T_r/J$

# Diagrama de torsor

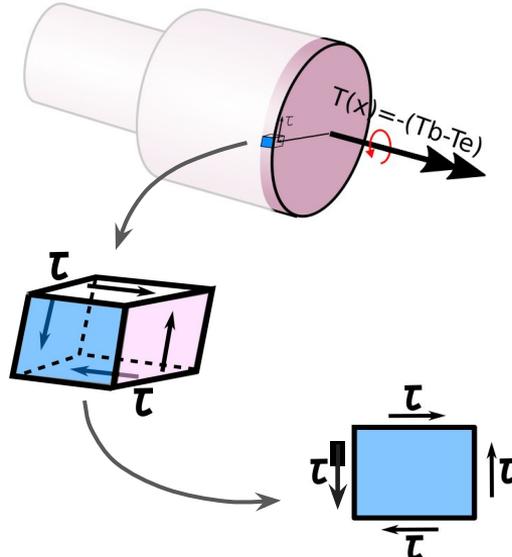
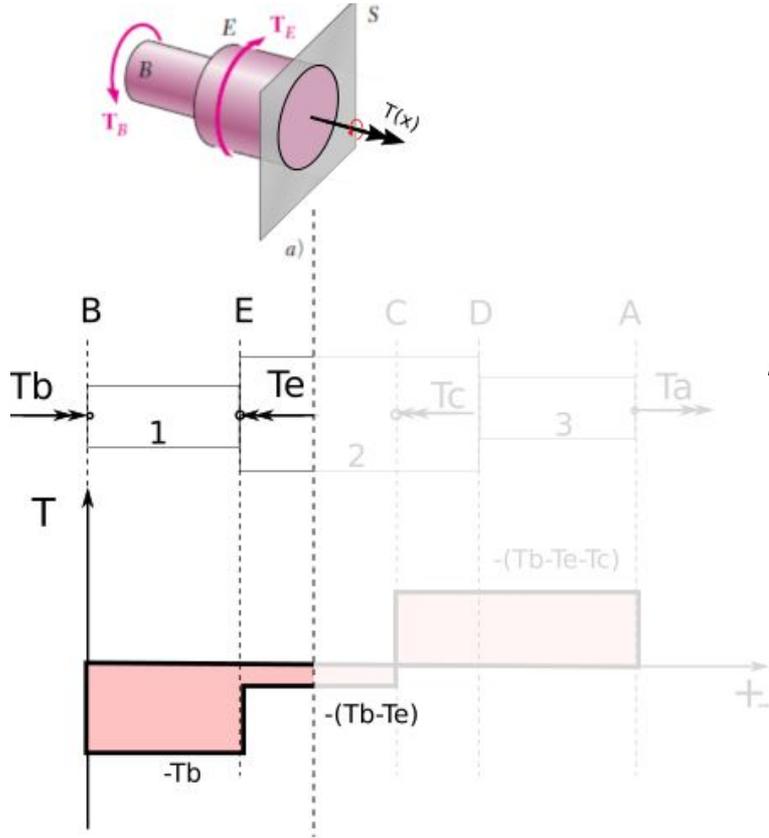
Representa la carga de torsión interna para cada sección perpendicular a la dirección  $x$ , por efecto de las cargas a las que se encuentra sometida la pieza.



# Diagrama de torsor



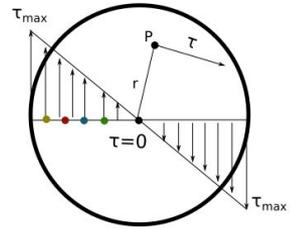
# Relación torsor - esfuerzos



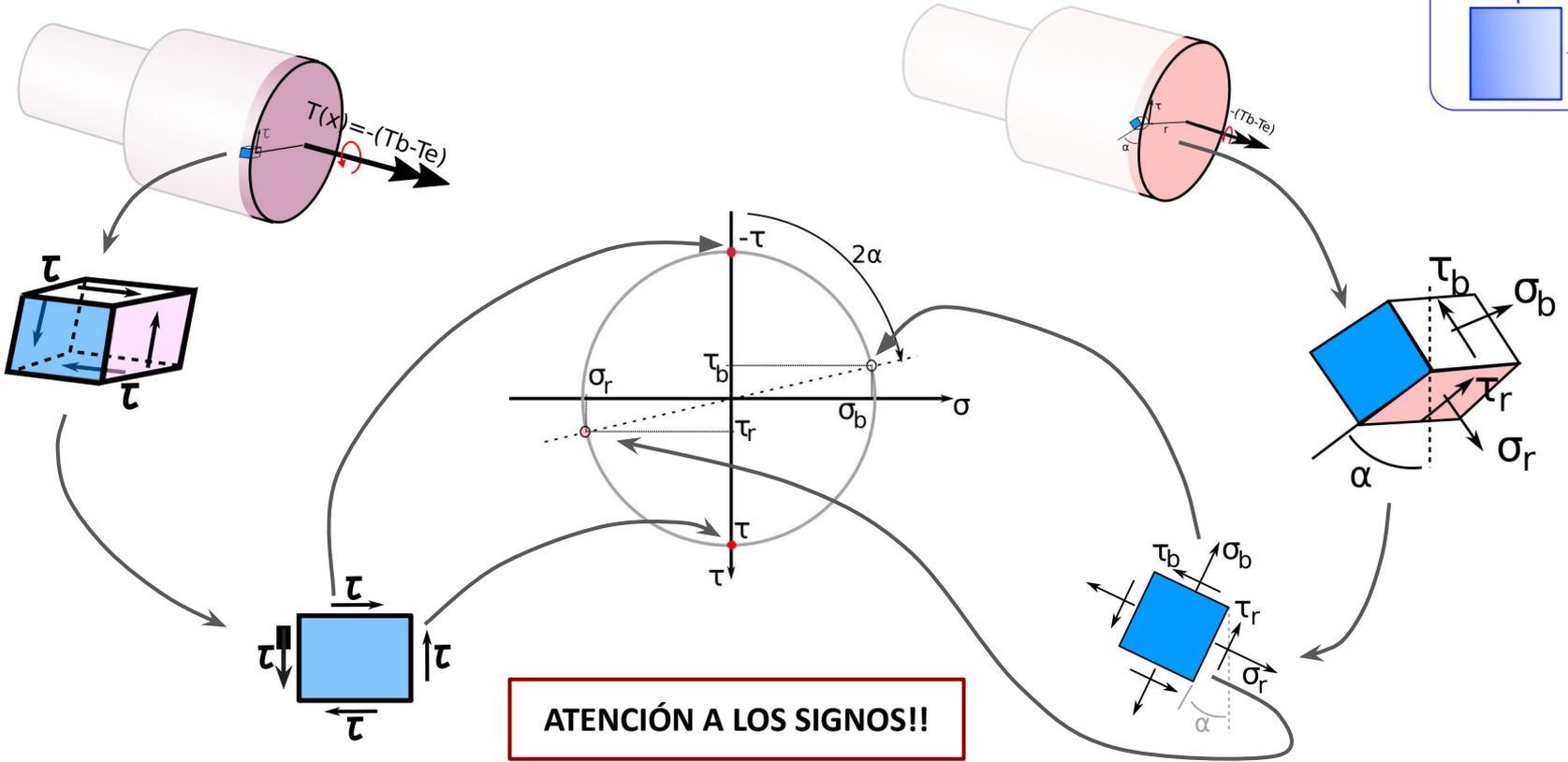
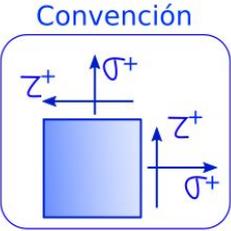
Con esto podemos determinar el estado tensional de cualquier punto de un sólido sometido a torsión pura.

$$\tau(r) = \frac{Tr}{J}$$

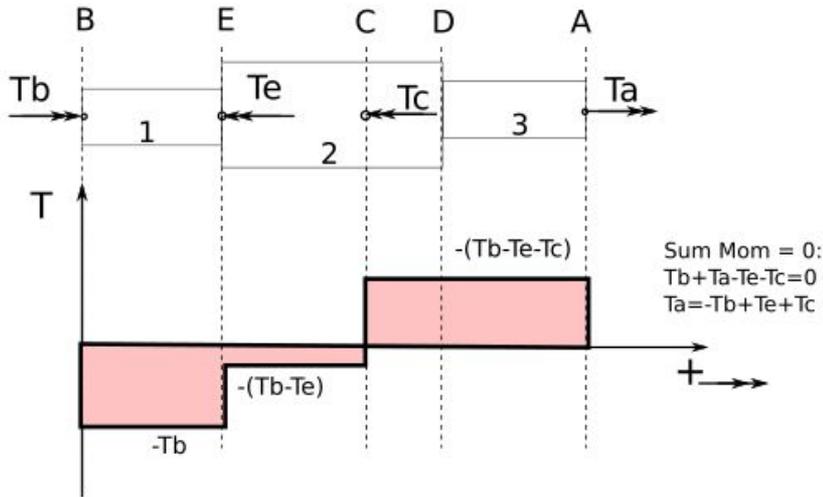
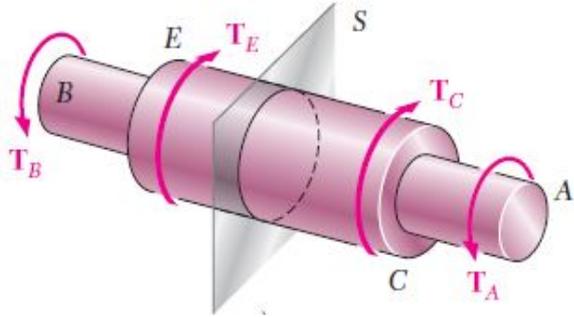
Los puntos más comprometidos de una pieza sometida a torsión son los correspondientes a la superficie, puesto que el esfuerzo crece con el radio



# Relación torsor - esfuerzos



# Cálculo de ángulos



Para utilizar la fórmula de  $\theta$ , hay que recordar que *solamente* se puede utilizar cuando tanto el torsor, como las propiedades de mecánicas y geométricas deben ser constantes. De lo contrario, habrá que dividir las expresiones en suma de tramos donde sí se cumpla esta condición.

$$\theta = \frac{T.L}{G.J}$$

$$\theta_{eb} = \frac{T(eb).L(eb)}{GJ} = \frac{-T_b.L(eb)}{GJ}$$

$$\theta_{cb} = \frac{?T(cb)?.L(cb)}{GJ} = \theta_{eb} + \theta_{ce} = \frac{-T_b.L(eb)}{G.J_1} - \frac{(T_b - T_e).L(ce)}{G.J_2}$$

Si no es constante no podemos usar esto así!!!

Hay que dividirlos en tramos donde las 4 variables sean constantes!

$$\theta_{ac} = \frac{T(ac).L(ac)}{G.J_3} = \theta_{ad} + \theta_{dc} = \frac{-(T_b - T_e - T_c).L(ad)}{G.J_2} - \frac{(T_b - T_e - T_c).L(dc)}{G.J_3}$$

# Cálculo de ángulos - Hiperestaticidad

Hallar los ángulos de rotación de la sección B y de la sección C con respecto a A.

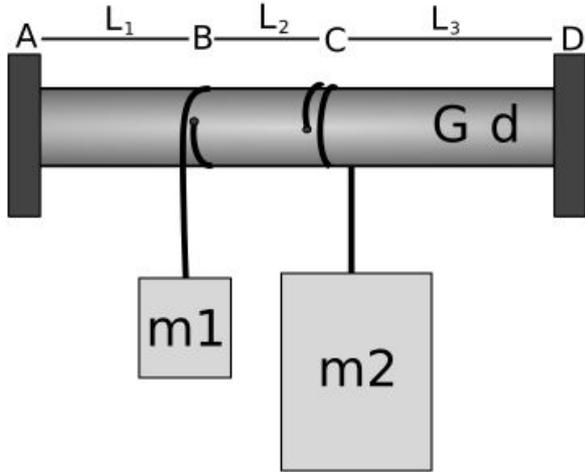
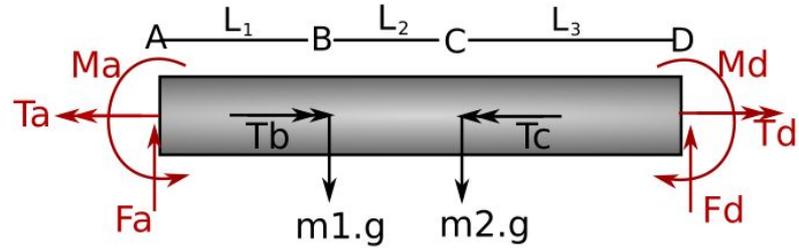


Diagrama de cuerpo libre.



Para determinar los ángulos necesito hacer el diagrama  
-> necesito conocer los torques en la reacciones:

$$\sum T = 0 \rightarrow T_b + T_d = T_a + T_c$$

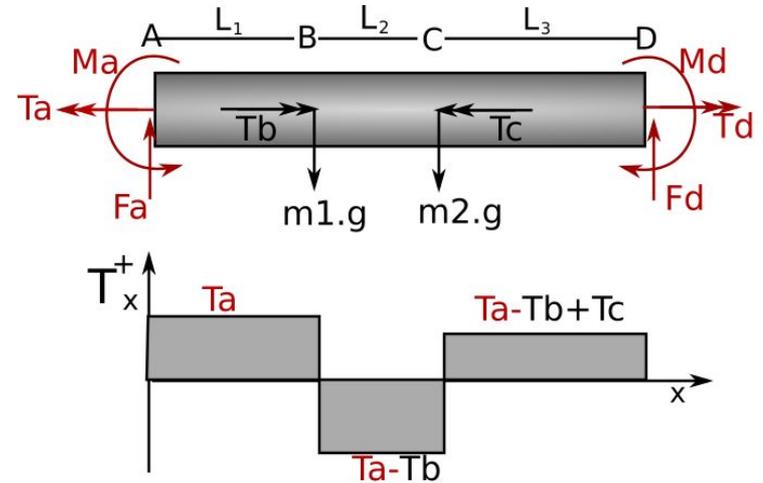
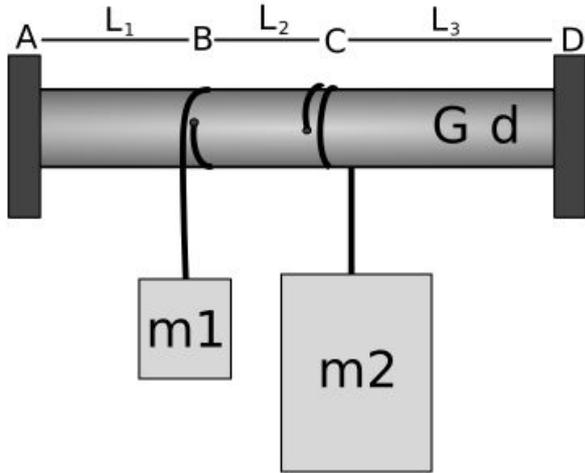
$$T_b = m_1 \cdot g \cdot d / 2$$

$$T_c = m_2 \cdot g \cdot d / 2$$

3 Ecuaciones y 4 incógnitas! -> **condición de deformación!!**

# Cálculo de ángulos - Hiperestaticidad

Hallar los ángulos de rotación de la sección B y de la sección C con respecto a A.

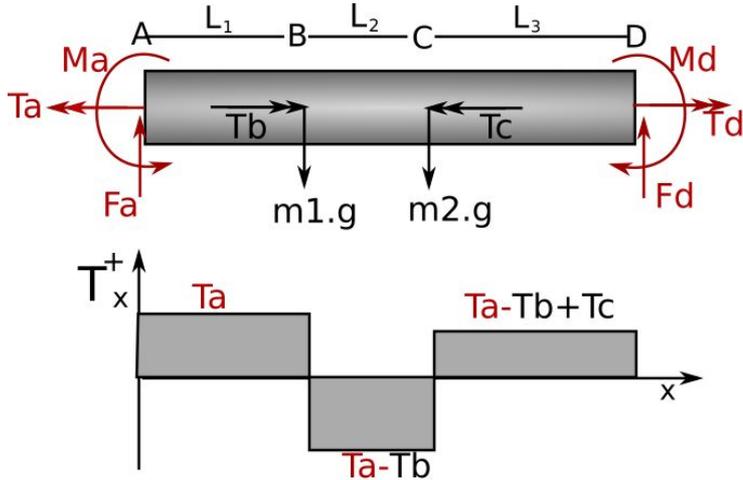


La condición de deformación depende de cada caso, es una condición que nosotros imponemos porque SI o SI se debe satisfacer!-----> Giro de D con respecto a A = 0!!

$$\theta_{DA} = \theta_{BA} + \theta_{CB} + \theta_{DC} = 0$$

# Cálculo de ángulos - Hiperestaticidad

Hallar los ángulos de rotación de la sección B y de la sección C con respecto a A.



$$\theta_{DA} = \theta_{BA} + \theta_{CB} + \theta_{DC} = 0$$

$$\theta = \frac{T.L}{GJ} \quad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\theta_{DA} = \frac{1}{GJ} [T_a.L_1 + (T_a - T_b).L_2 + (T_a - T_b + T_c).L_3] = 0$$

Aquí se obtiene una nueva ecuación para poder resolver el sistema, ahora solo falta calcular los ángulos que nos piden.

$$\theta_{BA} = \frac{T_a.L_1}{GJ}$$

$$\theta_{CA} = \frac{1}{GJ} (T_a.L_1 + (T_a - T_b).L_2)$$