

Señales y Sistemas

Muestreo

Instituto de Ingeniería Eléctrica



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

MUESTREO DE SEÑALES

TEMAS:

1. GENERACIÓN DE UNA SEÑAL DE TIEMPO DISCRETO ($TC \rightarrow TD, x(t) \rightarrow x[n]$)
2. RECONSTRUCCIÓN DE UNA SEÑAL DE TIEMPO CONTINUO ($TD \rightarrow TC, x[n] \rightarrow x(t)$)
3. CAMBIO DE FRECUENCIA DE MUESTREO ($TD \rightarrow TD$)
4. PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES DE TIEMPO CONTINUO.

MUESTREO, ADC

RECONSTRUCCIÓN,
INTERPOLACIÓN,
DAC

* DIGITALIZACIÓN:

ADQUISICIÓN
ALMACENAMIENTO
TRANSMISIÓN
PROCESAMIENTO

SEGURIDAD
COMPRESIÓN
CALIDAD
MODELADO

PREDICCIÓN,
CLASIFICACIÓN
TRANSFORMACIÓN

RECONOCIMIENTO
DE PATRONES /
APRENDIZAJE
AUTOMÁTICO

ACTUAR, CONTROLAR

* TEOREMA DEL MUESTREO: GARANTÍA DE RECONSTRUCCIÓN DE LA SEÑAL

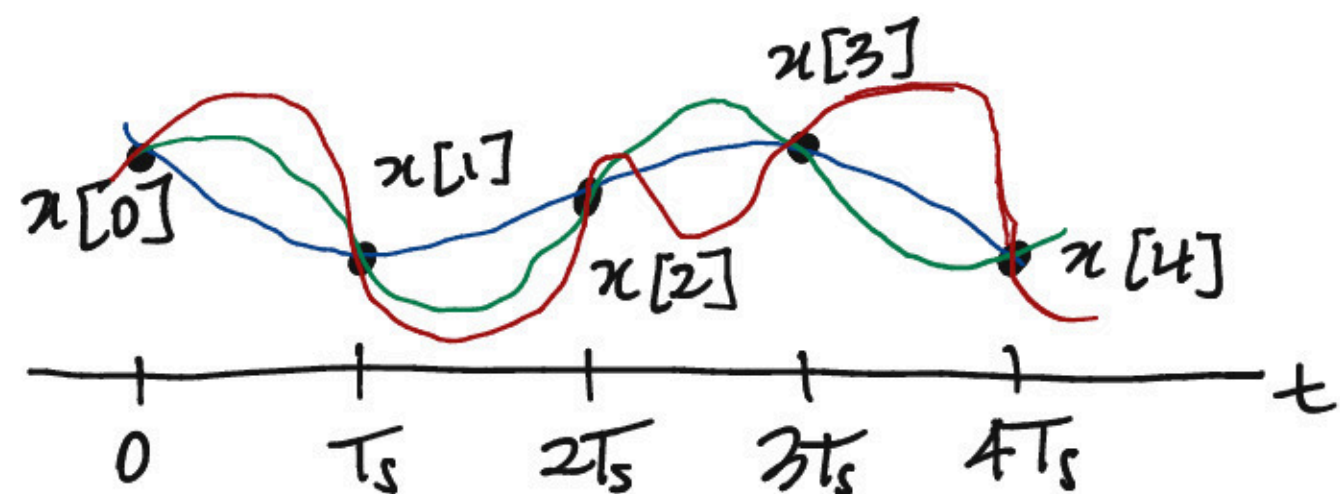
NYQUIST, 1928
SHANNON, 1948

* INFORMACIÓN (SHANNON, 1948): TEO.INFO MODELO MATEMÁTICO COMUNICACIONES

* LÍMITES - ERRORES - TOLERANCIA - COMPROMISO

LÍMITES TEÓRICOS

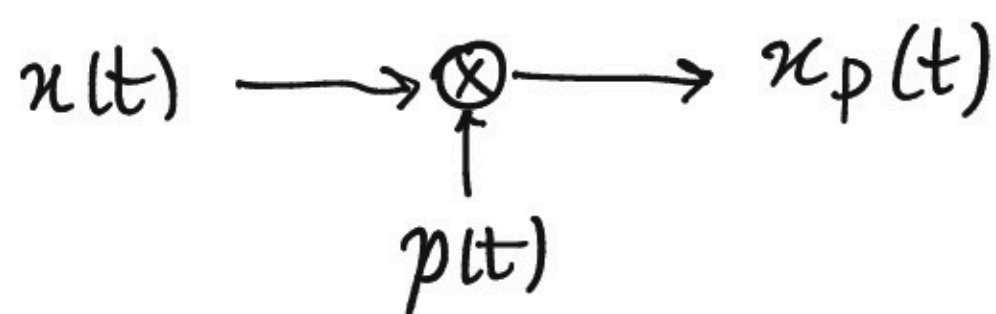
MUESTREO DE UNA SEÑAL DE TIEMPO CONTINUO



Dadas un conjunto de muestras $x[n] = x(nT_s)$, ¿¿ ¿ posible obtener $x(t)$?

Bajo ciertas hipótesis, sí!
 ¿Qué hipótesis?
 El Teorema de Muestreo

MODELO CONCEPTUAL 1

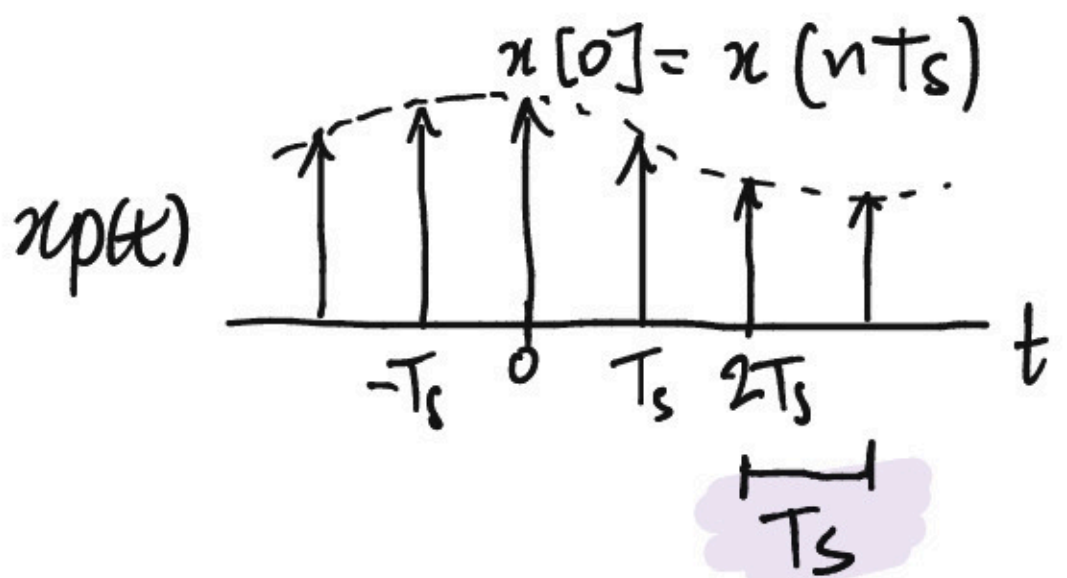
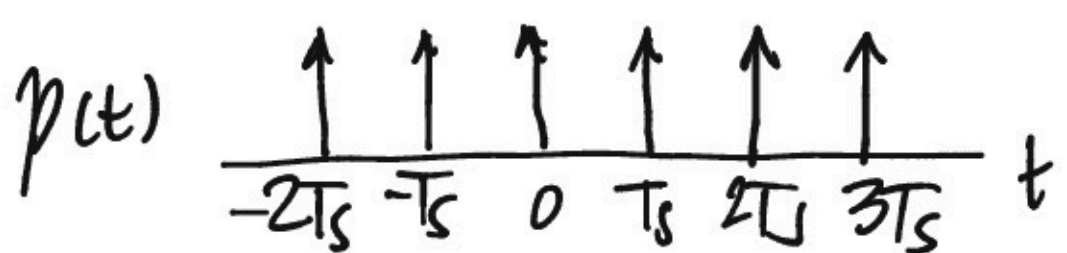
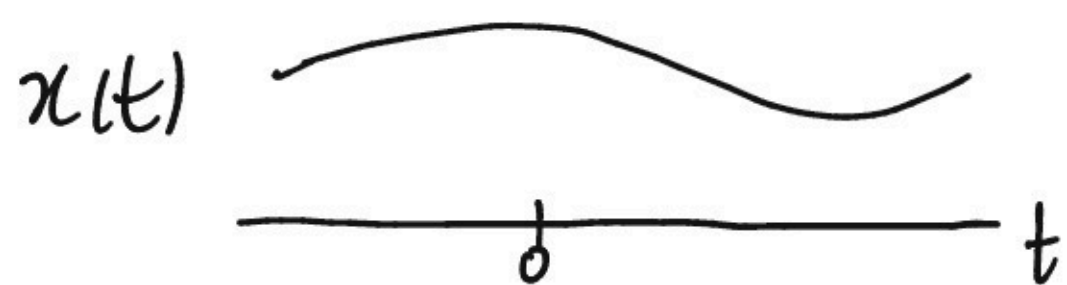


$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \quad \text{TREN DE IMPULSOS O PEINE DE DIRAC}$$

$$x_p(t) = x(t) p(t) = x(t) \sum_n \delta(t - nT_s) = \sum_n x(t) \delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_n \underbrace{x(nT_s)}_{x[n]} \delta(t - nT_s)$$

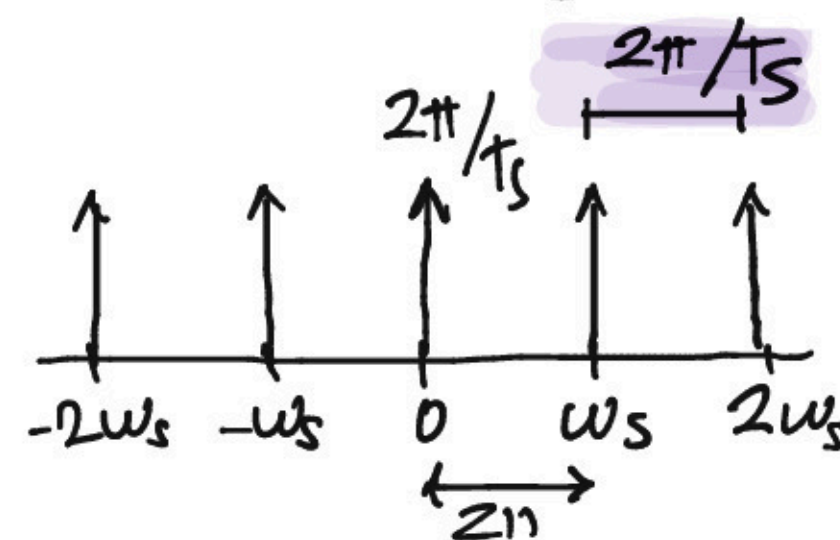
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi f_s$$



$p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} P(j\omega)$ $p(t)$ is periódica $T_s \Rightarrow$ Serie de Fourier

$$a_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} p(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$

$$\Rightarrow P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_k \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_s})$$



Teorema del Muestreo

TEOREMA DE MUESTREO

(Nyquist, 1928; Shannon, 1948)

Sea $x(t)$ una señal de banda limitada ω_M
 $X(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_M$.

Sean $x[n] = x(nT_s)$ muestras de $x(t)$
tomadas a una frecuencia de muestreo

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad n \in \mathbb{Z}$$

La señal $x(t)$ queda únicamente
determinada por $\{x[n]\}$ si

$$\omega_s > 2\omega_M \leftarrow \text{frecuencia de Nyquist}$$

Demo: Consideremos el proceso de toma
muestras $x(nT_s)$ como el producto

$$x(t) \cdot p(t) = x_p(t) \quad \text{con } p(t) = \sum_n \delta(t - nT_s)$$

$$\text{Recordemos que } P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_k \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_k \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_k X(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_k X(j(\omega - k\omega_s)) = X_p(j\omega)$$

DESARROLLO ALTERNATIVO

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) P(j(\omega - \theta)) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) \frac{2\pi}{T_s} \sum_k \delta(\omega - \theta - k\omega_s) d\theta$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_k \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) \delta(\omega - k\omega_s - \theta) d\theta}_{X(j(\omega - k\omega_s))}$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_k X(j(\omega - k\omega_s))$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_k X(j(\omega - k\omega_s))$$

Es una función de ω periódica formada por la superposición de copias de $X(j\omega)$ trasladadas en múltiplos de la frecuencia de muestreo ω_s y con una escala de

$$1/T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

Podemos recuperar $X(j\omega)$ con un filtro pasabajos $\omega_c = 1/2 \omega_s$, con una ganancia de T_s . Obtenemos $X_r(j\omega)$

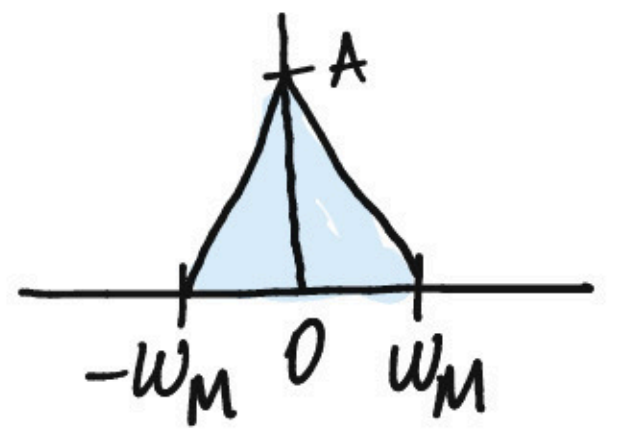
Esto podemos hacerlo mientras que no haya solapamiento entre las copias de $X(j(\omega - k\omega_s))$, o sea si

$$\omega_M < \omega_s - \omega_M \Rightarrow \omega_s > 2\omega_M$$

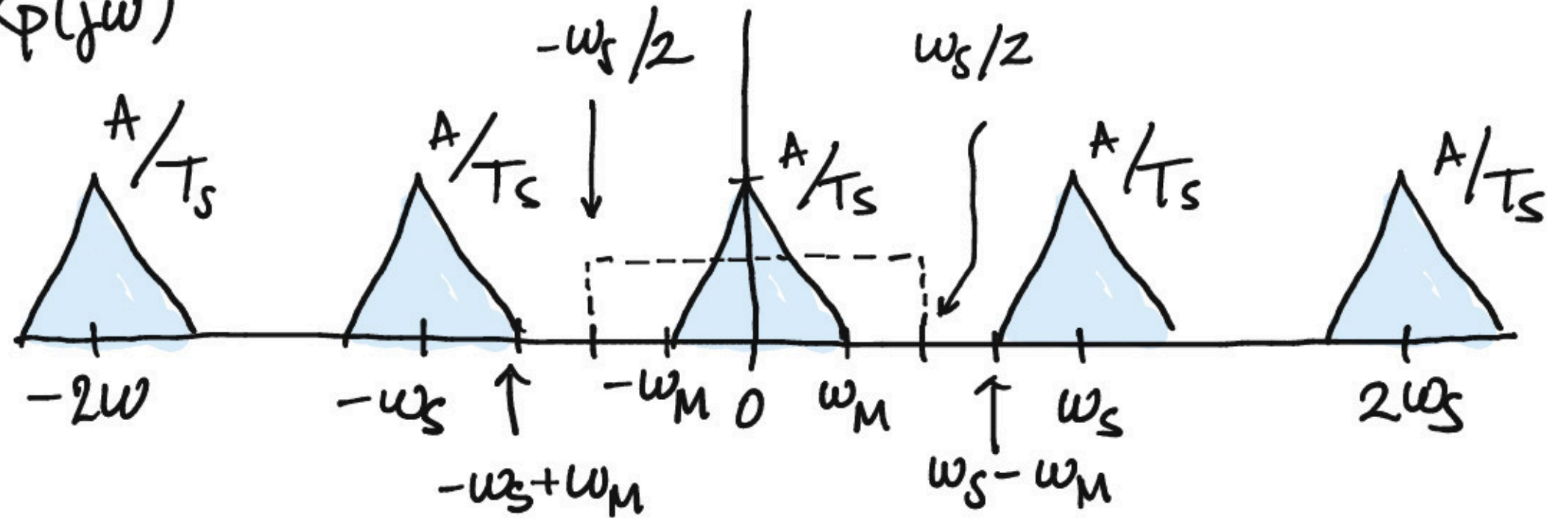
¿Qué pasa si $\omega_s > 2\omega_M$? Veamos el espectro.

¿Cómo queda el espectro?

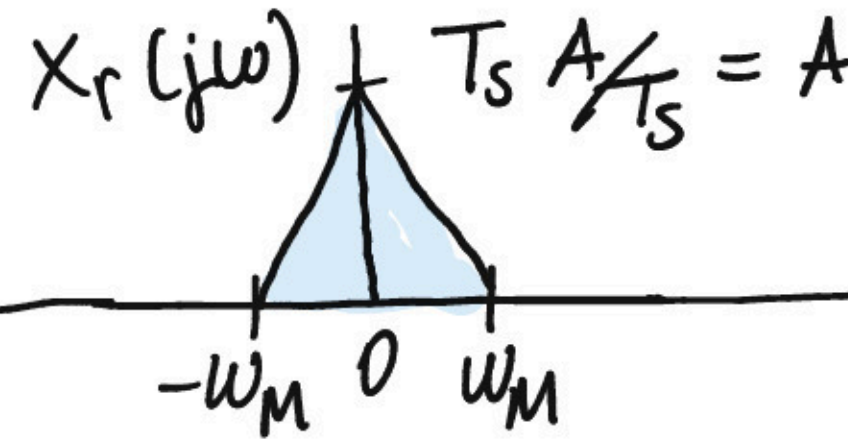
$X(j\omega)$



$X_p(j\omega)$



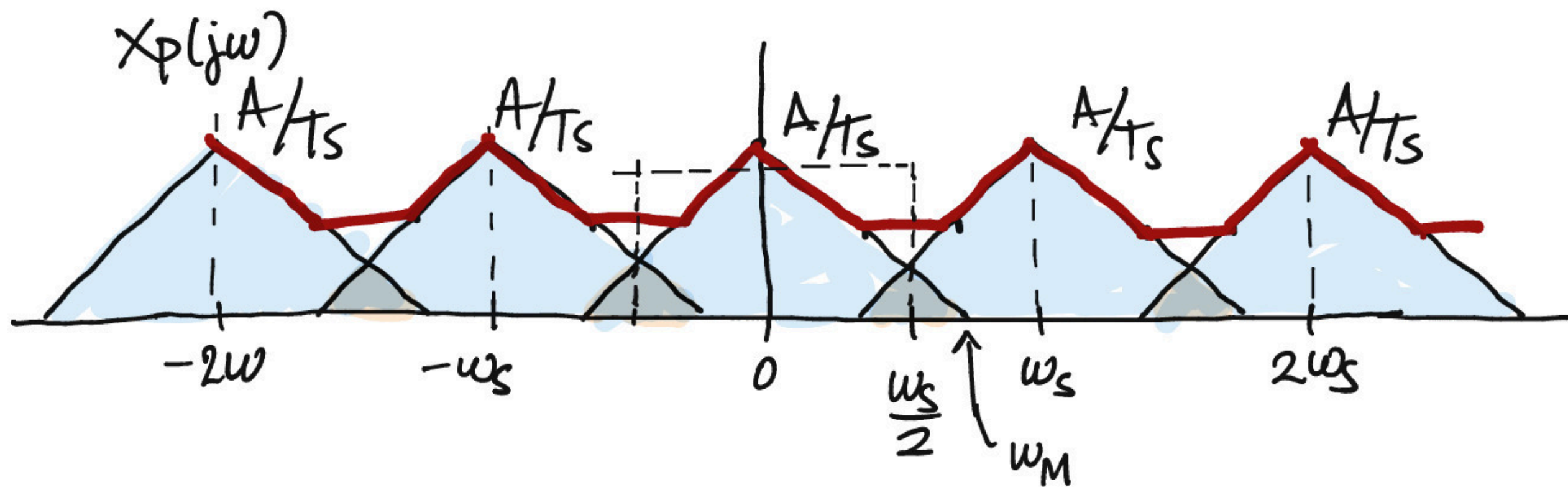
LPF ($\omega_c = \omega_s/2$), $G = T_s$



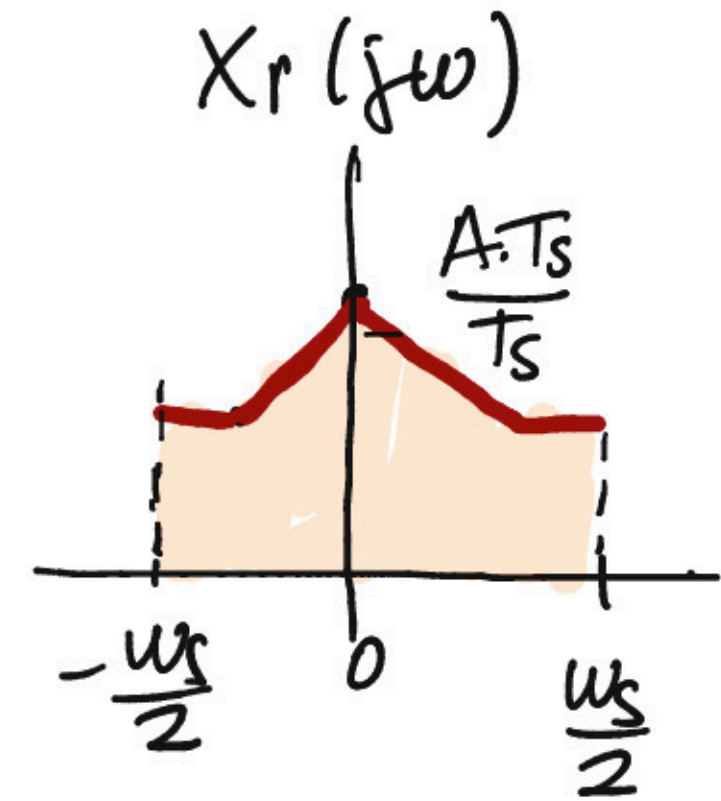
$$X_r(j\omega) = X(j\omega)$$

$$\hookrightarrow x_r(t) = x(t)$$

si $\omega_s < 2\omega_M$



LPF $\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s$

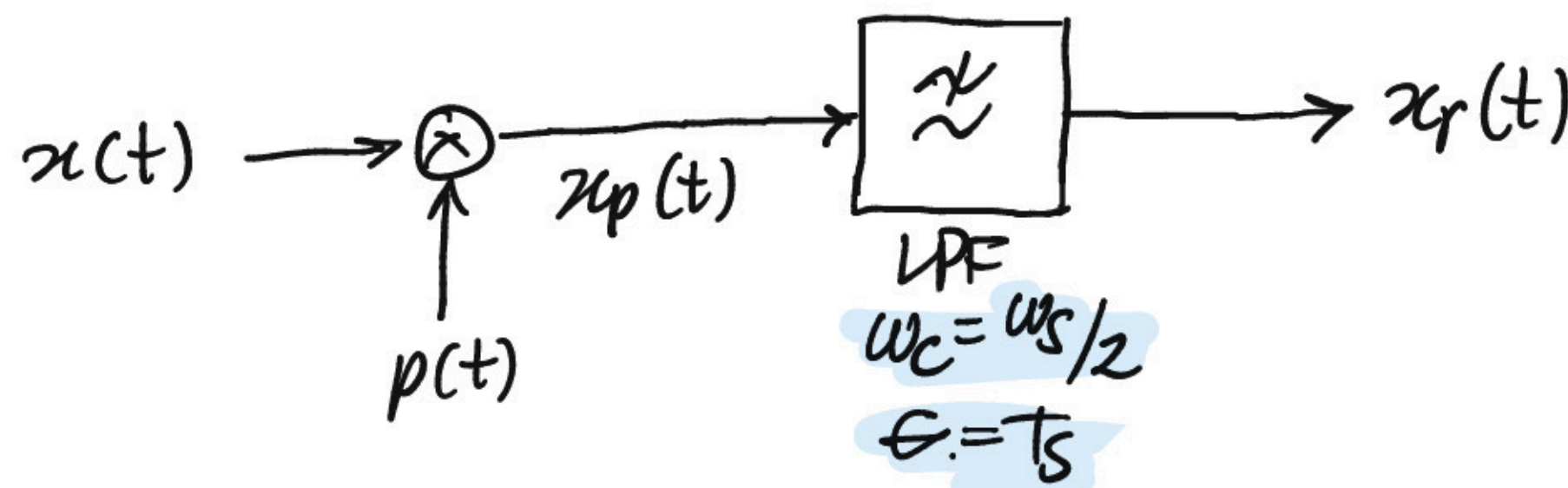


Cuando $\omega_s \leq 2\omega_M$ hay solapamiento de los espectros en $X_p(j\omega)$ y se pierde información de $X(j\omega)$.

$X_r(j\omega) \neq X(j\omega)$
 $x_r(t) \neq x(t)$

SOLAPAMIENTO en inglés **ALIASING**. (filtro anti aliasing?)

¿cómo obtener $x_r(t)$?



si $\omega_s > 2\omega_M$ $x_r(t) = x(t)$

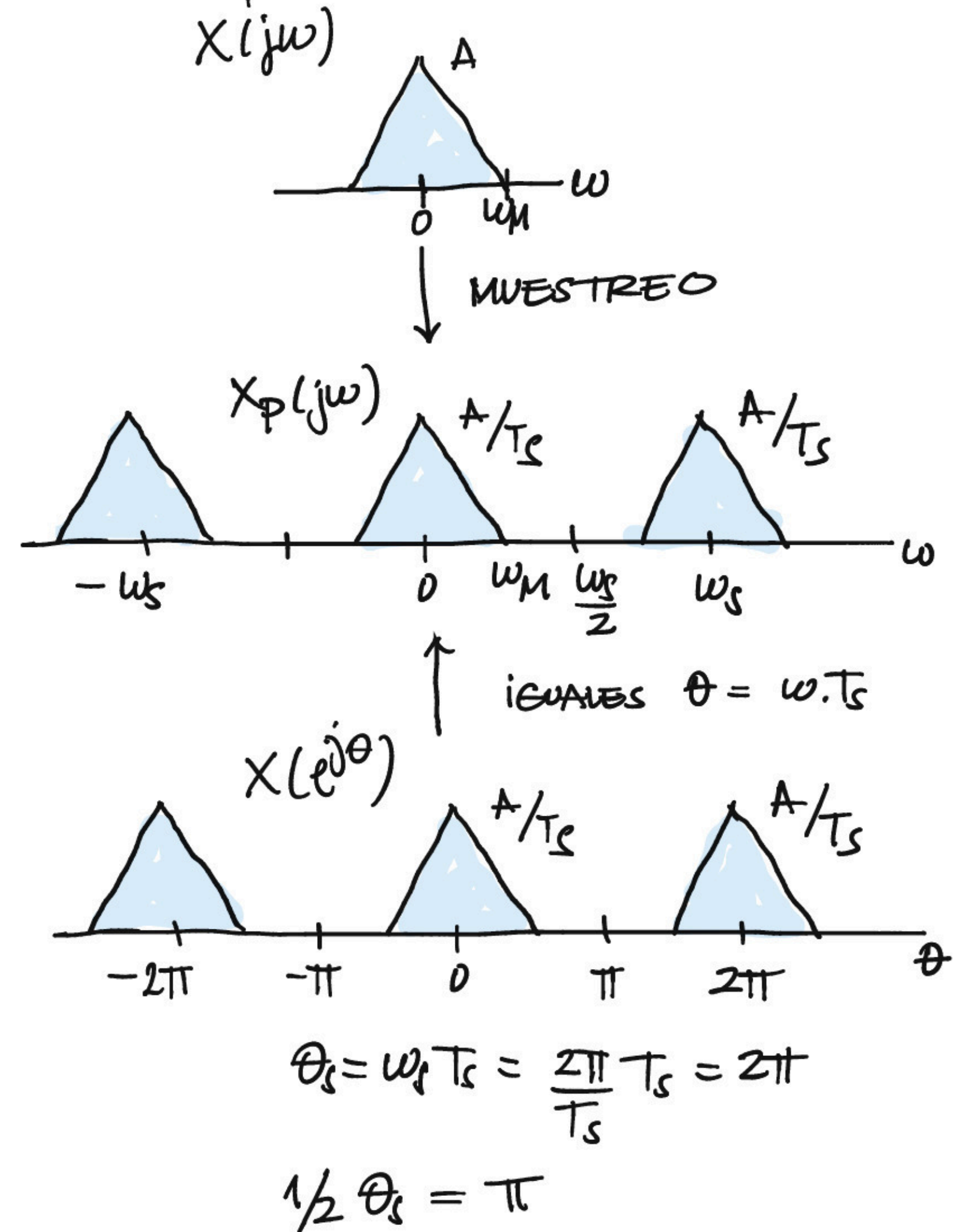
¿Terminamos con la demostración del TM? **NO**. Solo vimos que $x_p(t) \leftrightarrow X_p(j\omega)$. ¿Y $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\theta})$?

En la práctica (y la realidad) no tenemos $x_p(t)$, tenemos un conjunto de muestras $x[n]$, con una DFT $X(e^{j\theta})$. ¿Cuál es la relación con $X_p(j\omega)$?

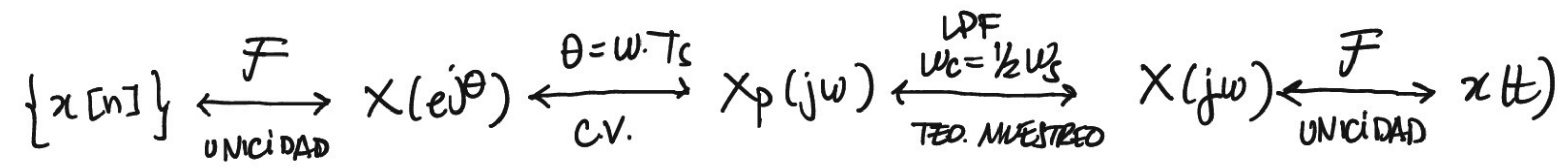
$$\begin{aligned}
 X_p(j\omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_k X(j(\omega - k\omega_s)) \\
 &= \mathcal{F} \left\{ x(t) \sum_k \delta(t - kT_s) \right\} = \\
 &= \mathcal{F} \left\{ \sum_k x(t) \delta(t - kT_s) \right\} \\
 &= \mathcal{F} \left\{ \sum_k x(kT_s) \delta(t - kT_s) \right\} \\
 &= \sum_k x[k] \underbrace{\mathcal{F} \left\{ \delta(t - kT_s) \right\}}_{e^{-jk\omega T_s}} \\
 &= \sum_k x[k] e^{-jk\omega T_s} \\
 &= \sum_k x[k] e^{-jk\theta} \Big|_{\theta = \omega T_s} \\
 &= X(e^{j\theta}) \Big|_{\theta = \omega T_s} = X_p(j\omega)
 \end{aligned}$$

Los espectros son iguales con un cambio de variable en el dominio del espectro.

Veamos cómo queda



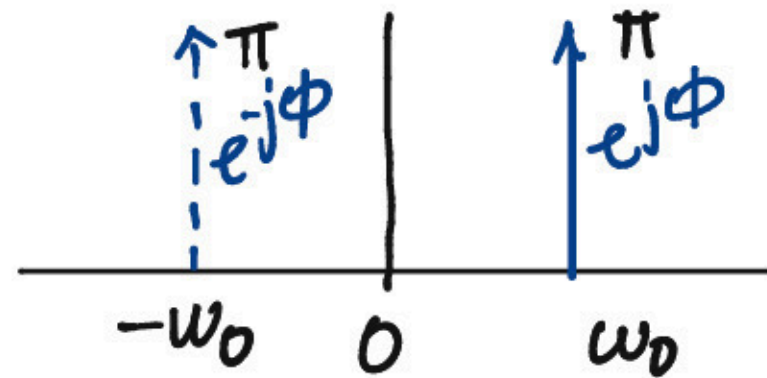
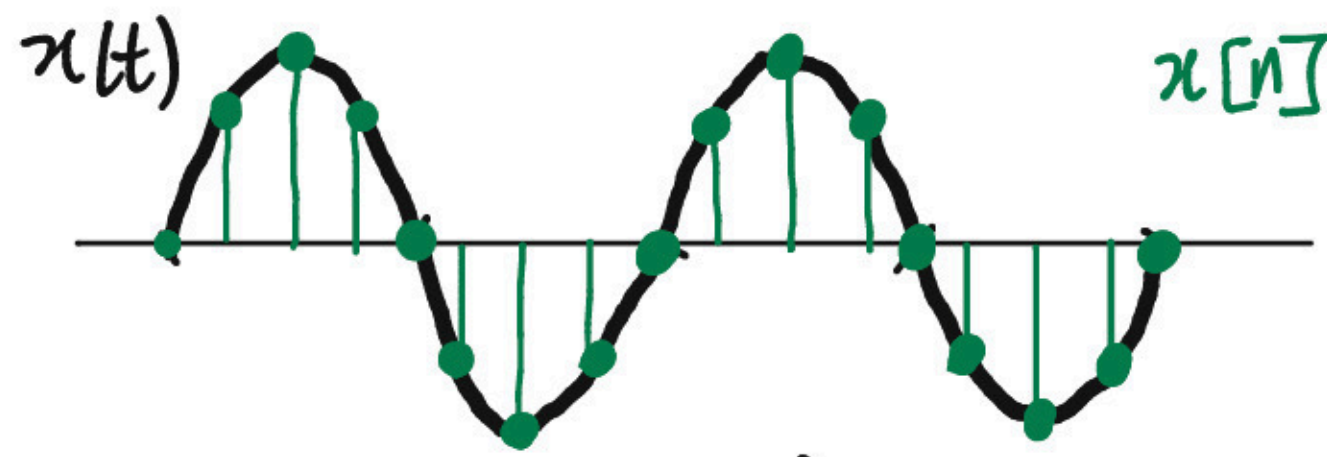
ENTONCES, PARA TERMINAR LA DEMO DEBEMOS RELACIONAR $x[n]$ CON $x(t)$



Muestreo de una sinusoidal

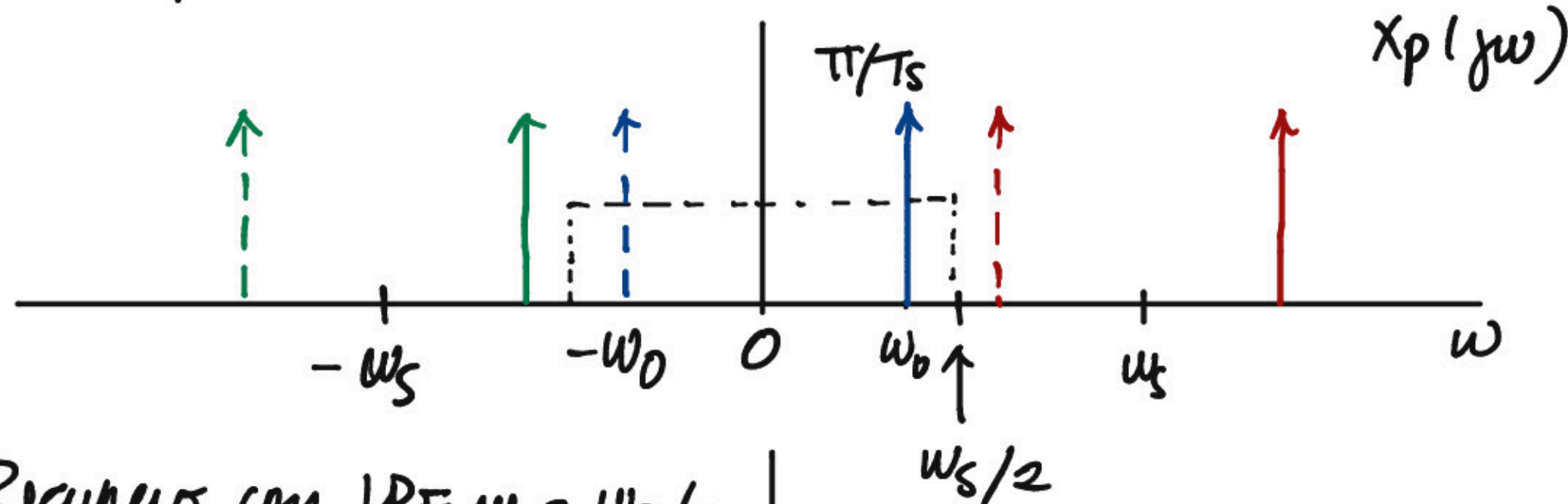
MUESTREO DE UNA SINUSOIDAL ($\omega_s > 2\omega_0$ y $\omega_s < 2\omega_0$)

Analizemos el muestreo de una sinusoidal, ω_0

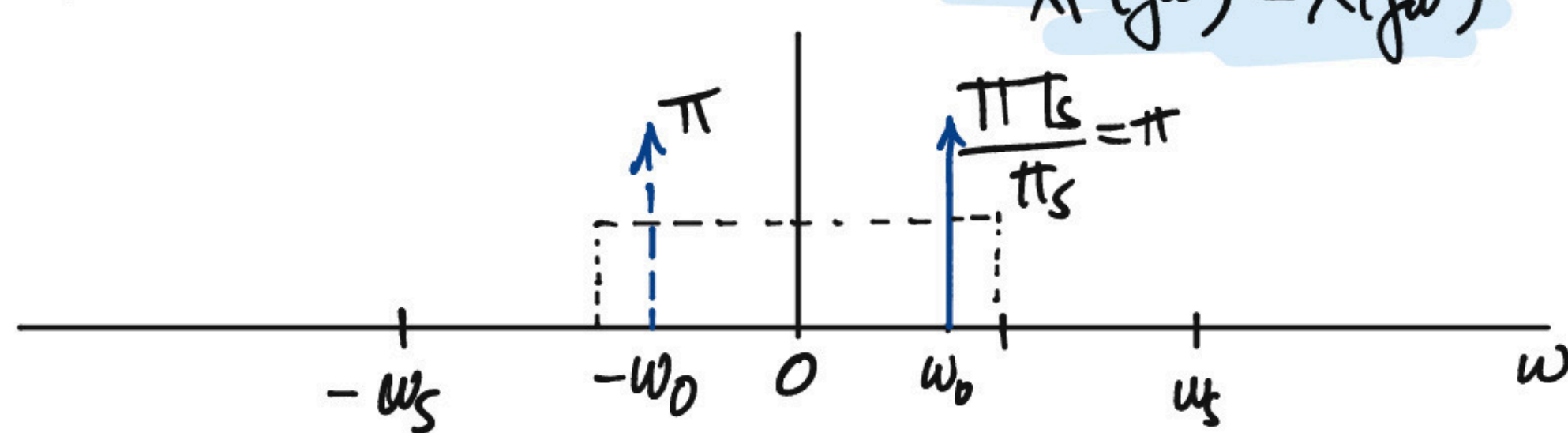


$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) \quad X(j\omega) = \pi \left(\delta(\omega - \omega_0) e^{j\phi} + \delta(\omega + \omega_0) e^{-j\phi} \right)$$

Veamos primero el caso: muestreo con $\omega_s > 2\omega_0$

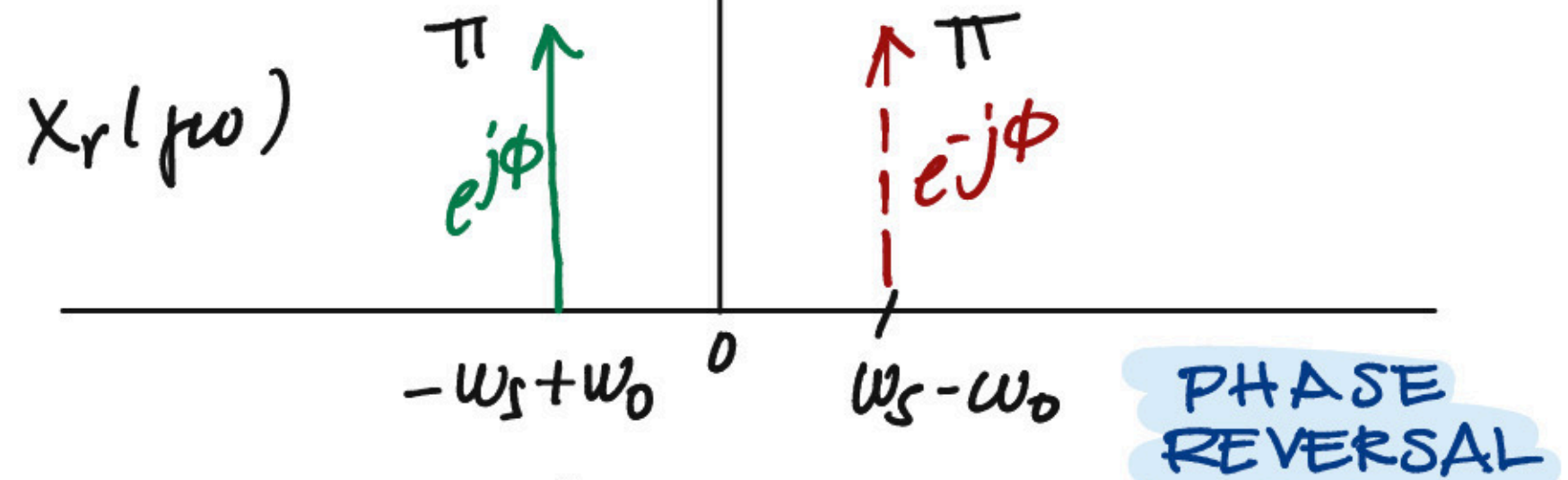
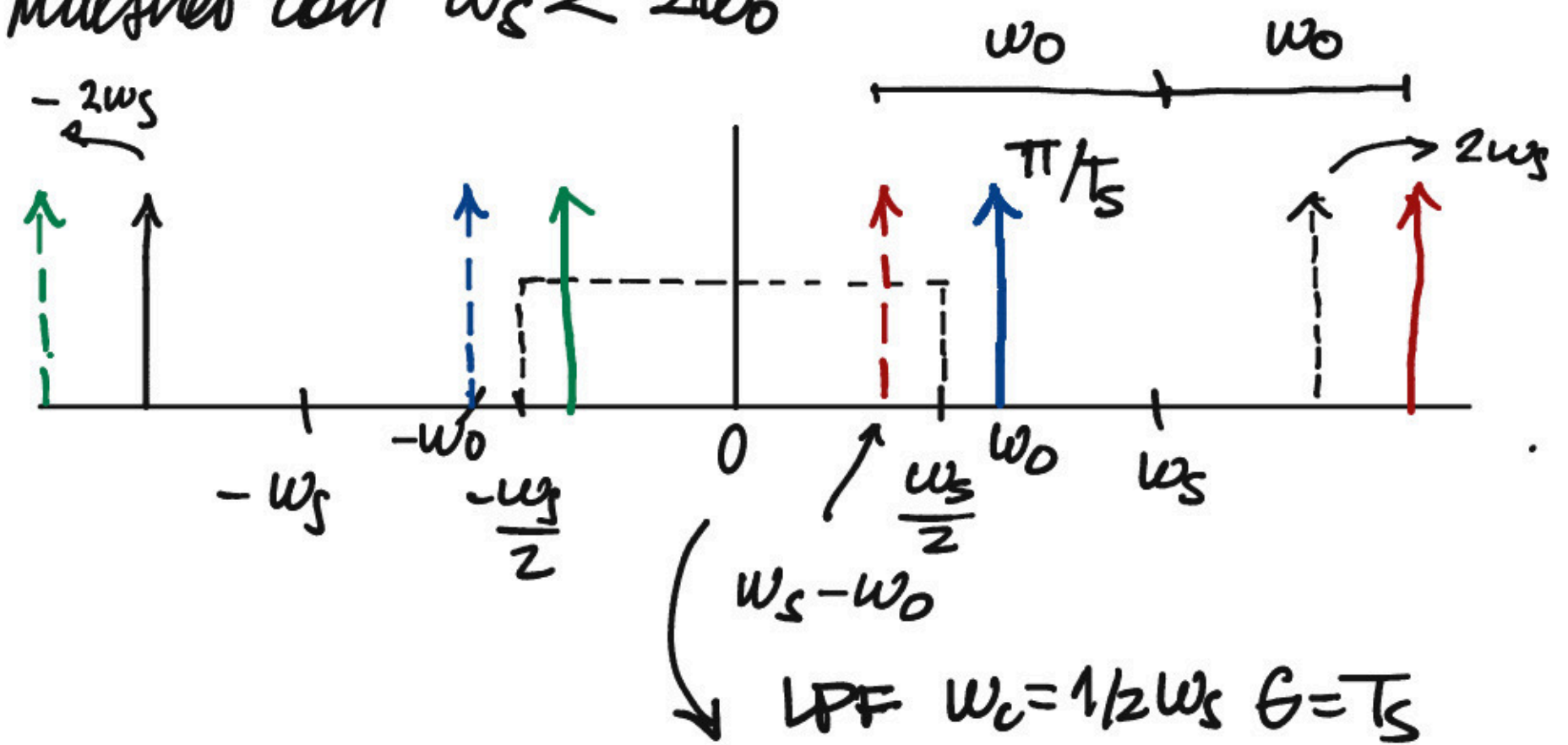


Recupero con LPF $\omega_c = \omega_s/2$
 $G = T_s$



$$X_r(j\omega) = X(j\omega)$$

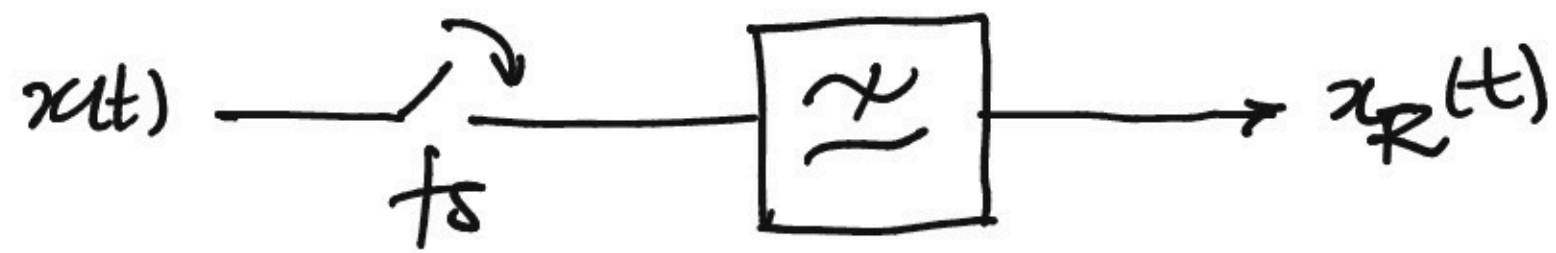
Muestreo con $\omega_s < 2\omega_0$



$$x_r(t) = \cos((\omega_s - \omega_0)t - \phi) \neq x(t)$$

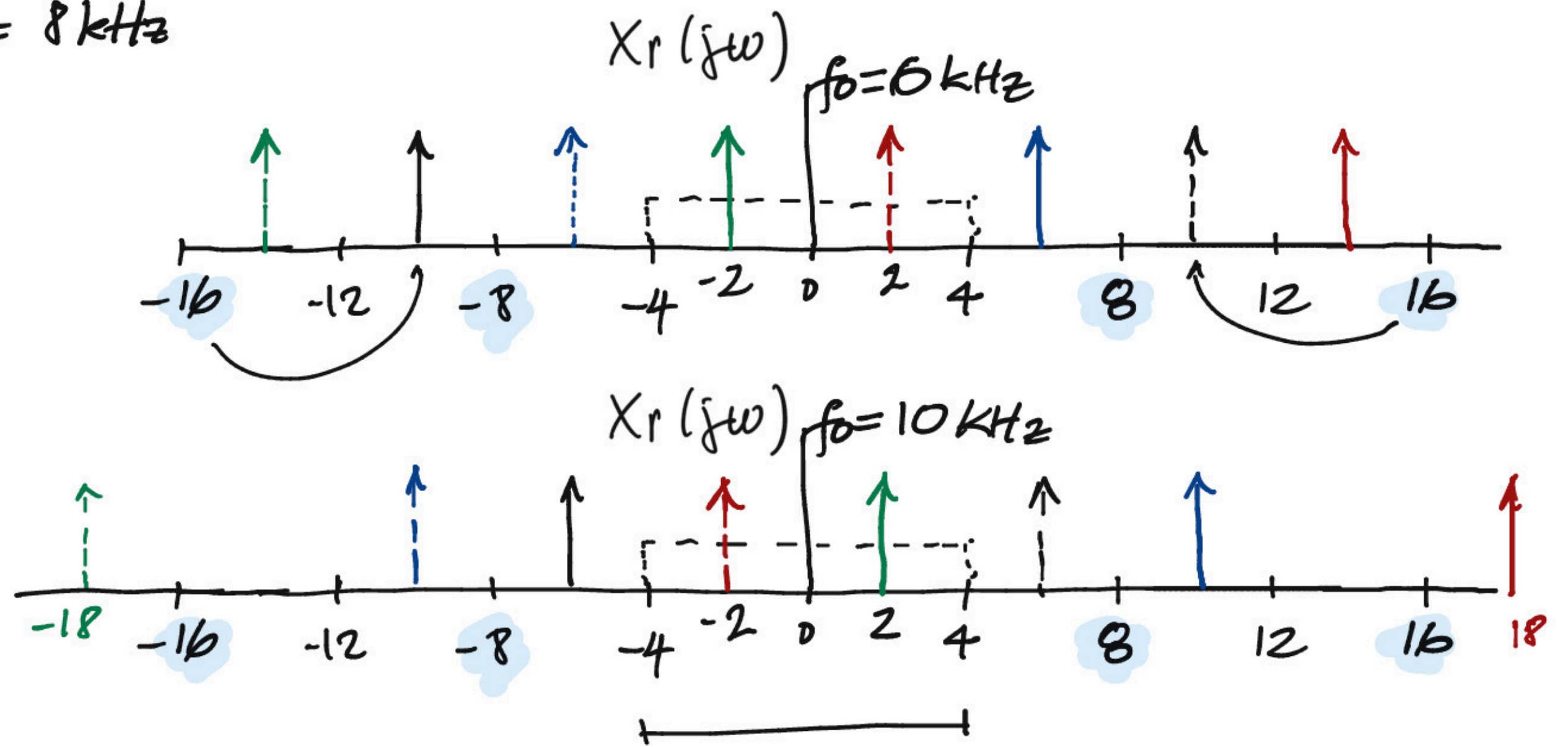
Tenemos un proceso que va a copiar las deltas de coseno periodizadas dentro de la banda del LPF. En el ejemplo anterior queda el periodico centrado en ω_s pero si ω_0 es mayor puede ser el periodizado en $k\omega_s$.

Pongamos números al ejemplo anterior, $f_s = 8 \text{ kHz}$
 $(\omega_s = 2\pi \cdot 8000 = 16000\pi)$



$x(t) = \cos(\omega_0 t)$ $\omega_c = \omega_s/2$
 $T = T_s$

f_0	f_R (kHz)
1	1
2	2
3	3
4	? (YA LO VEREMOS)
6	2 ALIASING, PHASE REVERAL
7	3 ALIASING
10	2 ALIASING
14	2 ALIASING, PHASE REVERSAL

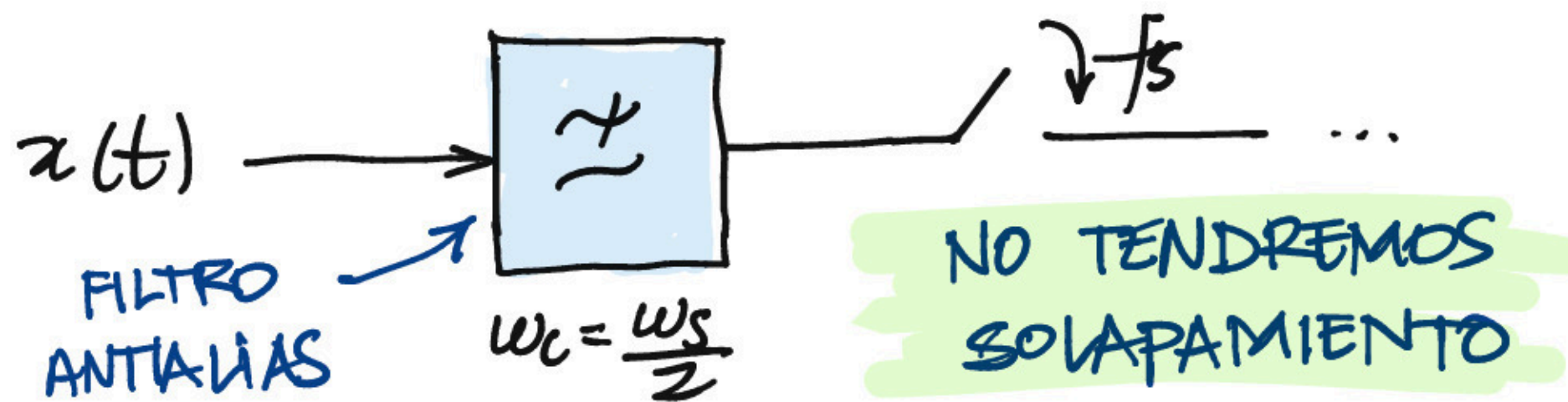


x_R NO PUEDE TENER FRECUENCIAS MAYORES A $\omega_s/2$.

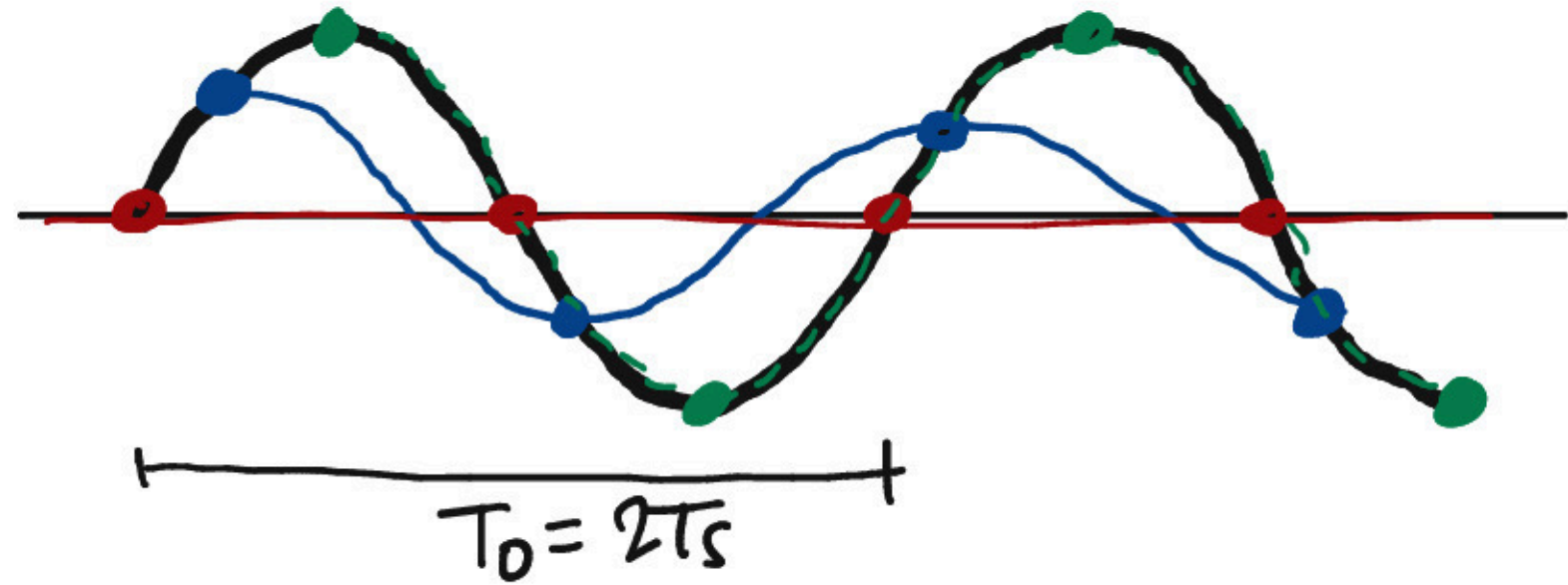
¿CÓMO EVITAMOS EL SOLAPAMIENTO?
 No lleva a una interpretación incorrecta de la señal.

USAMOS UN FILTRO ANTIALIASING ANTES DE MUESTREAR

Sabemos que componentes a frecuencias mayores a $1/2 \omega_s$ causan solapamiento, evitemos tenerlas.



¿Qué pasa con $\omega_0 = \frac{1}{2}\omega_s$? ($T_0 = 2T_s$)



$$x(t) = (\cos \omega_0 t + \phi) = \cos \phi \cos \omega_0 t - \sin \phi \sin \omega_0 t$$

$$x[n] = x(nT_s) = \cos \phi \cos n\pi - \sin \phi \underbrace{\sin n\pi}_{=0}$$

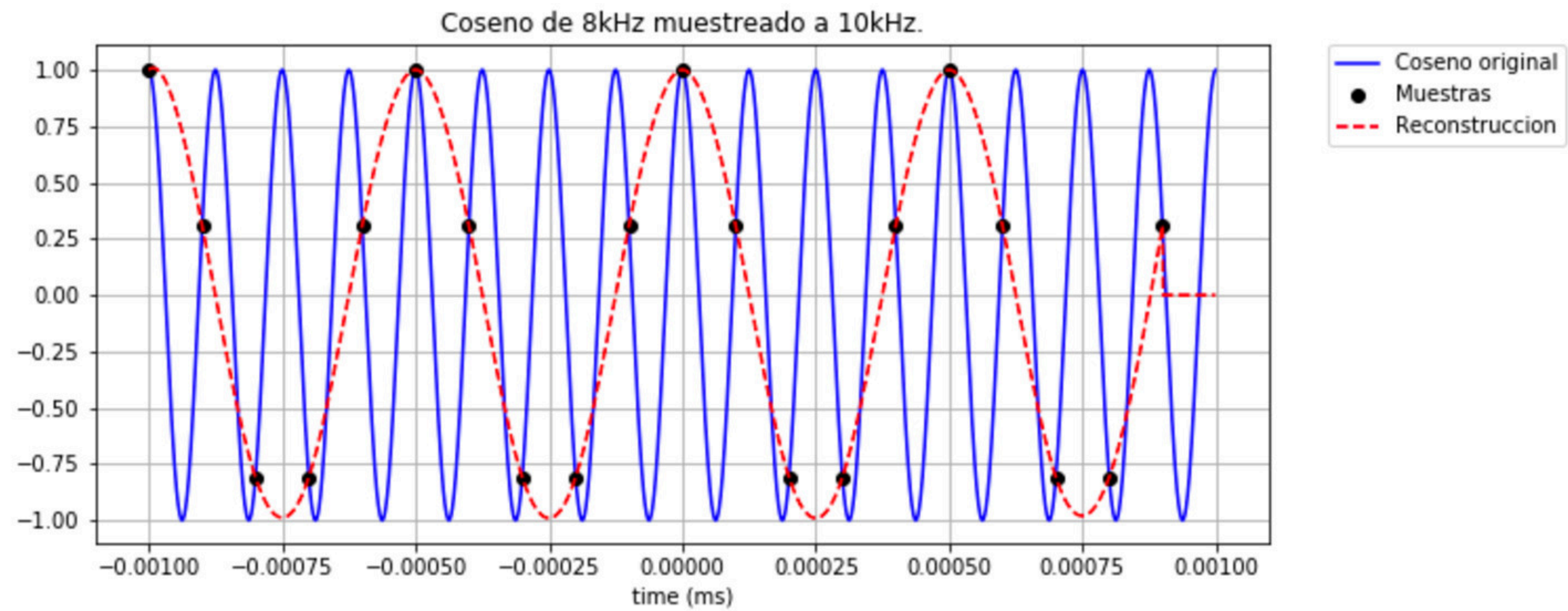
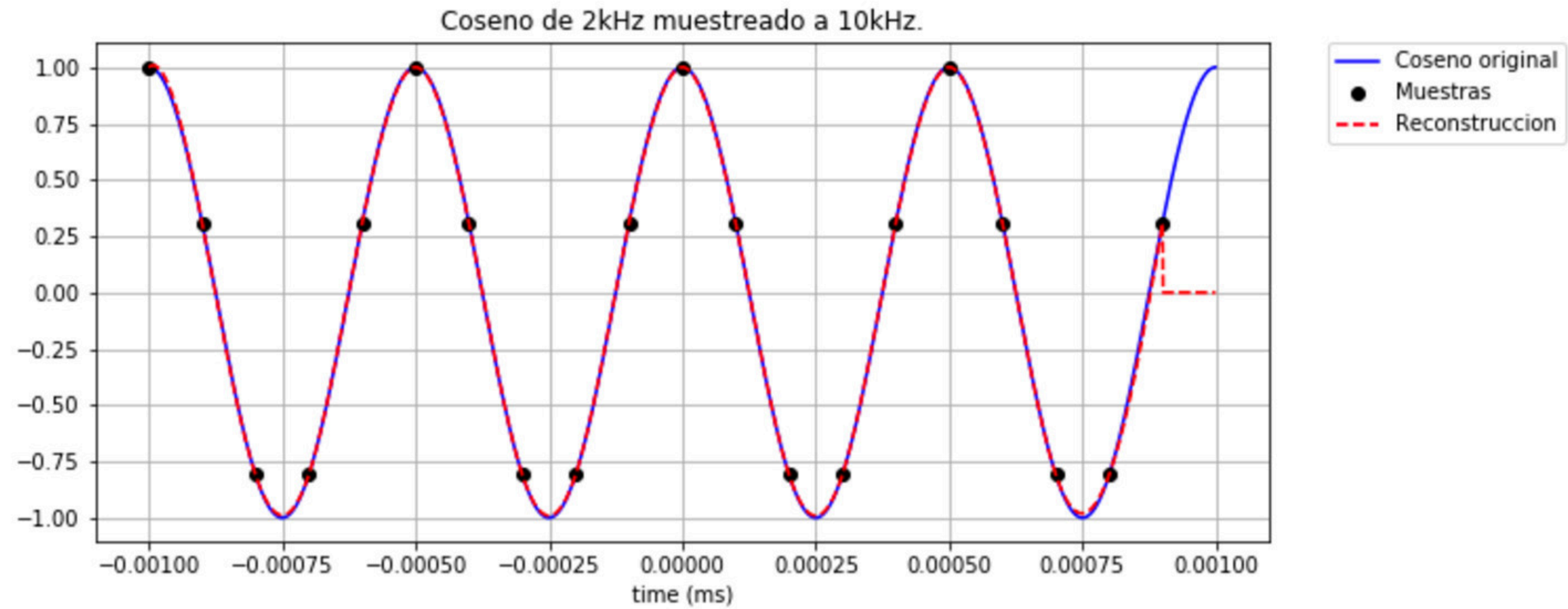
$$\omega_0 t \Big|_{nT_s} = \frac{\omega_s}{2} nT_s = \frac{2\pi}{2T_s} nT_s = n\pi$$

Luego de reconstruido $x_r(t) = \underbrace{\cos \phi}_{\neq 1} \cos \omega_0 t \neq x(t)$

LA RECONSTRUCCIÓN
NO ES PERFECTA

Si $\phi = \pi/2$ se anula la salida

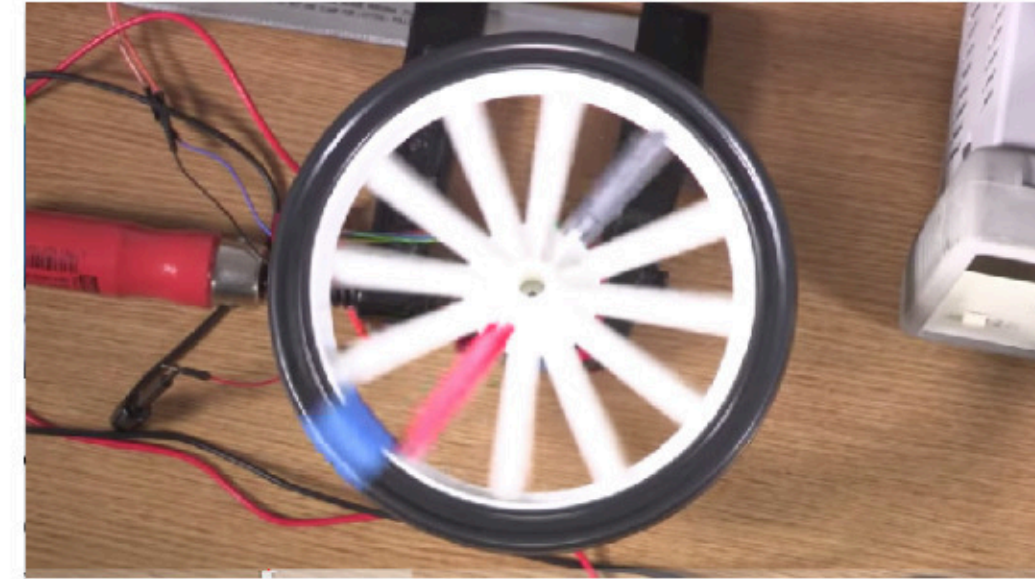
Muestreo y aliasing



Muestreo y aliasing en video

Wagon wheel effect

<https://www.youtube.com/watch?v=VNftf5qLpiA>



Hélices

<https://www.youtube.com/watch?v=9ulurW3BNjY>



Water experiment - Aliasing Effect due to the undersampling

https://www.youtube.com/watch?v=8_bkBL8e40Q



Playlist armada por Pechiar

<https://www.youtube.com/playlist?list=PL217FA8C506B5AEB9>

https://www.youtube.com/playlist?list=PL1UErACSwZ_hQwQbLCSxDg7dQ2FiltKhE

Muestreo y aliasing: efecto estroboscópico

