CDIV 2021 - PRIMER PARCIAL
SOLUCIÓN

Ejercicios de verdadero o falso

Ejercicio 1.

(1) Sean A, B dos conjuntos no vacíos tales que $A \neq B$ y $A \subset B$. Entonces existe $x \in B$ tal que $x \notin A$.
(2) Sean A, B dos conjuntos no vacíos tales que $A \subset B$. Entonces si $x \in B$, $x \notin A$.

(1) **VERDADERO:** Directo a partir de las definiciones.
(2) **FALSO:** Por ejemplo, consideremos $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$. Entonces $A \subset B$, $1 \in B$ y $1 \in A$.

Ejercicio 2.

(1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ es válido para todo $n \in I\!N, n \geq 1$.
(2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$ es válido para todo $n \in I\!N, n \geq 1$.

(1) **VERDADERO:** El en práctico 2 probamos por Inducción completa que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(2) **FALSO:** Basta con ver que no se verifica para $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ pero $\frac{n(n-1)}{2} = 0$.

Ejercicio 3.

(1) Si $|x - 1| < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$ entonces $|x^2 - 1| < 1/2$.
(2) Si $|x - 1| < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces $|x^2 - 1| < 1/2$.

(1) **VERDADERO:** Resolvemos $|x-1| < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$. Para eso, estudiamos el signo de $x-1$ (para sacar el valor absoluto) y tenemos:

- Si $x \geq 1$, entonces $|x - 1| < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \Leftrightarrow x - 1 < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \Leftrightarrow x < \sqrt{\frac{3}{2}}$.
- Si $x < 1$, entonces $|x - 1| < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \Leftrightarrow -x + 1 < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \Leftrightarrow x > 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Luego, los $x \in \mathbb{R}$ que verifican $|x - 1| < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$ son los que se encuentran en el intervalo $A = \left(2 - \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Por otro lado (repitiendo el razonamiento anterior), tenemos que:

$$|x^2 - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in B = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Como $2 - \sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{\frac{1}{2}}$, entonces $A \subset B$ y la afirmación es verdadera:

$$\text{si } |x - 1| < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \Rightarrow x \in A \subset B \Rightarrow x \in B \Rightarrow |x^2 - 1| < \frac{1}{2}.$$

(2) **FALS0:** Resolvemos $|x - 1| < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$. Para eso, estudiamos el signo de $x - 1$ (para sacar el valor absoluto) y tenemos:

- Si $x \geq 1$, entonces $|x-1| < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x - 1 < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < 2 - \sqrt{\frac{1}{2}}$.
- Si $x < 1$, entonces $|x-1| < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow -x + 1 < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Luego, los $x \in \mathbb{R}$ que verifican $|x-1| < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$ son los que se encuentran en el intervalo $A = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 2 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. Por otro lado (repitiendo el razonamiento anterior), tenemos que:

$$|x^2 - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in B = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Como $2 - \sqrt{\frac{1}{2}} > \sqrt{\frac{3}{2}}$, no se verifica que $A \subset B$, por lo que existen $x \in A$ tales que $x \notin B$, es decir que $|x-1| < 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$ pero $|x^2 - 1| \geq \frac{1}{2}$.

Utilizando la sugerencia: Observando el gráfico de $f(x) = x^2$ alrededor del punto $(1,1)$ se puede observar que el intervalo $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}]$ se mapea biyectivamente sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Por lo tanto $|x^2 - 1| < 1/2$ sii $|x-1| < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$, ya que $\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ejercicio 4.

(1) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico aparece en la figura. Entonces $\int_a^b f < \frac{b^3}{3}$.
(2) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico aparece en la figura. Entonces $\int_a^b f < \frac{b^3}{3}$.

(1) **VERDADERO:** $\int_a^b f(x)dx < \int_0^b f(x)dx = \frac{b^3}{3}$.
(2) **FALSO:** Sea $c < 0$ el punto donde f tiene una discontinuidad (ver en la figura), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^0 f(x)dx + \frac{b^3}{3}.$$

Entonces $\int_a^b f(x)dx < \frac{b^3}{3} \Leftrightarrow \int_a^c f(x)dx + \int_c^0 f(x)dx < 0$, pero esto no puede ser ya que $\left|\int_a^c f(x)dx\right| < \int_c^0 f(x)dx$ (ver la figura).

Ejercicio 5.

(1) Sea f como en la figura. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-p| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$
(2) Sea f como en la figura. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x-p| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$

(1) **VERDADERO:** Observar que la afirmación se refiere al entorno reducido $B^*(p, \delta)$.
(2) **FALSO:** Si tomamos $0 < \varepsilon < L - f(p)$ y $x = p$, entonces para todo $\delta > 0$ $|x-p| = 0 < \delta$ pero $|f(x) - L| = L - f(p) > \varepsilon$.