1. Ejercicio.

(a) Para que la función $f(z) = (ax + by) + i(cx + dy)$ verifique las ecuaciones de C-R se requiere que $a = d$ y $b = -c$.

(b) Para encontrar las expresiones de las ecuaciones de C-R en coordenadas polares usamos $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Así tenemos $r^2 = x^2 + y^2$ y $\tan\theta = \frac{y}{x}$. De aquí: $2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$ y entonces $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, de la misma forma obtenemos $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Por otra parte $\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ de lo cual se extrae $\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$ y $\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$. Substituyendo en la primera ecuación de CR se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}[-\frac{y}{x^2+y^2}] + \frac{\partial u}{\partial r}[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}] = \frac{\partial v}{\partial\theta}[\frac{x}{x^2+y^2}] + \frac{\partial u}{\partial r}[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}]$$

y para la segunda

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}[\frac{x}{x^2+y^2}] + \frac{\partial u}{\partial r}[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}] = -[\frac{\partial v}{\partial\theta}[-\frac{y}{x^2+y^2}] + \frac{\partial u}{\partial r}[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}]].$$

Multiplicando por x la primera ecuación y por y la segunda y sumando obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial r}r = \frac{\partial v}{\partial\theta}.$$

Obteniendo la primera ecuación. Para obtener la segunda se procede de manera similar.

(c) Para esta parte se puede ver que $f(z) = \log r + \theta$ y entonces $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}$ y por otra parte $\frac{\partial v}{\partial\theta} = 1$, verificando $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$ y además $\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0 = \frac{\partial u}{\partial r}$.

2. Se tiene que

(a)

$$\overline{\int_{\mathcal{C}}\varphi(z)dz} = \int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi(e^{i\theta})}(-ie^{-i\theta})d\theta = -\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi(e^{i\theta})}(i\frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta}})d\theta = -\int_{\mathcal{C}}\overline{\varphi(z)}\frac{dz}{z^2}.$$

(b)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\overline{f(z)}}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\overline{f(z)}}{\overline{z}(1-z_0\overline{z})}\frac{1}{z^2}dz = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z(1-\overline{z_0}z)}dz}$$

Pero podemos descomponer

$$\frac{1}{z(1-\overline{z_0}z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-\overline{z_0}z} = \frac{A(1-\overline{z_0}z)+Bz}{z(1-\overline{z_0}z)},$$

luego $A = 1$ y $B = \overline{z_0}$

$$\frac{1}{z(1-\overline{z_0}z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-\frac{1}{\overline{z_0}}}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\overline{\int_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z(1-\overline{z_0}z)}dz} = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z}dz} + \frac{1}{2\pi i}\overline{\int_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{z-\frac{1}{\overline{z_0}}}}$$

$$= \overline{f(0)} \text{ si } |z_0| < 1, \text{ o } = \overline{f(0)} - \overline{f(\frac{1}{\overline{z_0}})}\text{si } |z_0| > 1.$$

3. Se tiene

   (a) $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$ luego existe una singularidad evitable y $\tilde{f}(z)$ definida igual a 1 si $z = 0$ e igual $f(z)$ si $z \neq 0$ es una extensión holomorfa.

   (b) El radio de convergencia está definido por el primer cero de la función $e^z - 1$. Ese cero tiene lugar cuando $z = 2\pi i$. El radio de convergencia es por lo tanto 2π.

   (c) Se puede calcular los coeficientes por medio del desarrollo de Taylor, pero también se tiene
   $$1 = (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!})(1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \ldots)$$
   Igualando términos tenemos $0 = (\frac{1}{2} + B_1)$, $0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_3$, $0 = \frac{1}{24} + \frac{1}{6}B_1 + \frac{1}{4}B_2 + \frac{1}{6}B_3$. De donde $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$.

4. Si consideramos cada una de las transformaciones

   (a) $w = -i\frac{z-1}{z+1}$. La imagen del disco unidad esta determinada por el eje real cuya imagen es la recta. Por otro lado el 0 va a al complejo i luego la imagen del disco es $\Im z > 0$.

   (b) Para $z = i$ entonces $w = -1 + \frac{1}{2}i$, $z = -1$, $w = -\frac{1}{2}$ y finalmente para $z = -i$ se tiene $w = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. Entonces la imagen del círculo es la reta $\Re w = -\frac{1}{2}$. Además el cero va en el cero así que la imagen del disco es $\Re w > -\frac{1}{2}$.

5. Podemos ver que
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a + \sin\theta} d\theta = -i\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 2aiz - 1)z} dz$$
$$= 2\pi[\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 2aiz - 1)z} dz]$$
$$= 2\pi[Res(\frac{z^2 - 1}{(z^2 + 2aiz - 1)z}, 0) + Res(\frac{z^2 - 1}{(z^2 + 2aiz - 1)z}, i(-a + \sqrt{a^2 - 1})],$$
   si $a > 1$.

6. Sea entonces $p(z)$ nuestro polinomio

   (a) $p'(z) = \sum_{i=1}^{k} n_i (z - z_i)^{n_i - 1} \prod_{k\neq i}(z - z_k)^{n_k}$ entonces
   $$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{1}{z - z_i},$$
   entonces por la fórmula de Cauchy o por el teorema del residuo se tiene
   $$\int_{\mathcal{C}} z\frac{p'(z)}{p(z)} dz = \sum_{i=1}^{k} n_i z_i.$$