Soluciones del parcial final 14/05/2022.

Ejercicio 1

1. No, no existe. Por absurdo, si existiera entonces el eje real debe ir en la circunferencia unidad. En el dominio, el eje real y la recta $Im(z) = Re(z)$ forman 45 grados, pero sus imagenes forman 90 grados ya que uno es el eje real y otro es la circunferencia unidad. Esto es absurdo pues las transformaciones de Mobius preservan ángulos.

2. Si existe: es un teorema que existe una única transformación de Mobius que lleva $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto i$ y $\infty \mapsto -1$. Además, como las transformaciones de Mobius llevan circunferencias y rectas en circunferencias y rectas se sigue que el eje real va para la circunferencia unidad. Además como las Mobius preservan la orientación del plano, el semiplano superior va para el disco unidad. Entonces esta transformación de Mobius es la buscada. Para hallar una fórmula notar que si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ entonces $f(\infty) = -1$ implica que $f(z) = \frac{-z+b'}{z+d'}$. Luego $f(0) = 1$ entonces $f(z) = \frac{-z+b'}{z+b'}$. Por último, $f(1) = i$ implica $\frac{-1+b'}{1+b'} = i$, es decir, $b' = \frac{1+i}{1-i}$, terminando de hallar la fórmula.

3. Si ocurre eso entonces $\varphi \circ F$ es una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ pero acotada por 1, entonces es constante: $\varphi \circ F(z) = c \; \forall z \in \mathbb{C}$ y por lo tanto $F(z) = \varphi^{-1}(c) \; \forall z$, es decir, F es constante.

Ejercicio 2

1. Como A es simplemente conexo, el teorema de Cauchy nos asegura que la integral en todo camino cerrado es cero.

2. El hecho de que una función integre cero en toda camino cerrado es equivalente a tener primitiva F. Si $F(i)$ no vale lo deseado entonces le sumo una constante para que valga lo deseado. La función resultante sigue teniendo como derivada a $1/z$ pues sumar una constante no altera al derivar.

3. Si $\gamma(t) = e^{it}, \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$ entonces $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = i\pi = F(-i) - F(i)$. Despejando se obtiene el resultado.

4. La derivada vale $\frac{zF'(z)e^{F(z)} - e^{F(z)}}{z^2} = 0$. Se sigue que $e^{F(z)}/z = c \; \forall z \in A$. Usando que $F(i) = i\frac{\pi}{2}$ se ve que $c = 1$.

Ejercicio 3

1. La respuesta es no, pues si existe F con las propiedades exigidas entonces la función F tiene ceros que acumulan en $\mathbb{C}$, pues de hecho todo el eje real con $|x| > b$ son ceros. Por el teorema de los ceros se sigue que F es la función nula, pero entonces $F(0) = 0 \neq 1 = \rho(0)$.

2. Como dice la sugerencia, si la sucesión no converge a infinito entonces la sucesión estará acotada, es decir, estará toda contenida en una bola de centro 0 y radio $R > 0$, para algún R suficientemente grande. Pero como la sucesión son de números complejos todos distintos son infinitos puntos, todos dentro de $B(0, R)$, y por lo tanto acumulan en $\mathbb{C}$. Por el teorema de los ceros F es la función nula.

Ejercicio 4

1. Si $z \to 1$ a traves de los reales entonces $e^{\frac{1}{(z-1)^2}}$ tiende a ∞. Sin embargo, si nos acercamos a 1 a traves de los números de la forma $z = 1 + iy$ con $y \to 0$ entonces $e^{\frac{1}{(z-1)^2}} = e^{\frac{1}{(iy)^2}} = e^{\frac{1}{-y^2}}$ tiende a cero. Se deduce que el límite no existe y por lo tanto la singularidad es esencial.

2. Como la singularidad es esencial $f(B^*(1,r))$ es denso en $\mathbb{C}$, es decir, al clausurarlo se obtiene $\mathbb{C}$.

3. Para hacer la cuenta pensamos a f como aplicar sucesivamente los mapas $z \mapsto w = z - 1$, luego $w \mapsto v = w^2$, luego $v \mapsto u = \frac{1}{v}$ y por último $u \mapsto e^u$. Al aplicar los sucesivos mapas a la bola se obtiene:

$$B^*(1,r) \mapsto B^*(0,r) \mapsto B^*(0,r^2) \mapsto \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/r^2\} \mapsto \mathbb{C} - \{0\}$$

Ejercicio 5 La función racional que corresponde a $\frac{\sin\theta}{a+\sin\theta}$ es $R(x,y) = \frac{y}{a+y}$, por lo tanto, aplicando la fórmula de la sugerencia se tiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a+\sin\theta}\, d\theta = -i \int_\gamma \frac{z^2-1}{z(z^2+2iaz-1)}\, dz$$

siendo γ la circunferencia unitaria recorrida en sentido antihorario. La función cuenta con dos polos en el interior de γ, uno es $z = 0$ y el otro es $z = i(-a + \sqrt{a^2-1})$ (Recordar que $a > 1$). El residuo del primer polo es 1 y el del segundo polo es $-a\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$, es por esto que

$$-i \int_\gamma \frac{z^2-1}{z(z^2+2iaz-1)}\, dz = 2\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)$$

Ejercicio 6

1. Como son todos polos de orden 1 para calcular el residuo hay que hacer la cuenta

$$\mathrm{Res}(F,\beta_k) = \lim_{z\to\beta_k} (z-\beta_k)F(z) = \frac{\Pi_{j=1}^n(\beta_k-\alpha_j)}{\Pi_{j\neq k}^m(\beta_k-\beta_j)}$$

y

$$\mathrm{Res}(G,\beta_k) = \lim_{z\to\beta_k} (z-\beta_k)G(z) = \frac{\Pi_{j=1}^n(\beta_k-\alpha_j)}{\Pi_{j\neq k}^m(\beta_k-\beta_j)}$$

2. Como F y G no tiene singularidades esenciales entonces su resta tampoco. Por otro lado, $\lim_{z\to z_k}(z-\beta_k)(F(z)-G(z)) = 0$ y por lo tanto β_k no puede ser un polo de $F - G$, pues tendría orden 0. Se sigue que cada β_k es una singularidad evitable.

3. Como las singularidades son evitables existe una extensión holomorfa a todo el plano complejo.

4. Resulta que $\lim_{z\to\infty} D(z) = 0$ entonces la función D es acotada. Más precisamente, existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$ entonces $|f(z)| \leq 1$. Si $|z| \leq R$ entonces la función está acotada por un valor M ya que es continua y el conjunto de los z con $|z| \leq R$ es un compacto. Entonces para todo z, $|F(z)| \leq M + 1$, es decir F es acotada.

5. Como D es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y acotada entonces es constante, digamos, $D(z) = C\ \forall z \in \mathbb{C}$. Pero como $\lim_{z\to\infty} D(z) = 0$ entonces $C = 0$. Se concluye que $F(z) = G(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 7

1. Hay varias formas de hacer esta cuenta. Veamos una forma. Resulta que $\int_\gamma z^n \quad dz = 0$ si $n \neq -1$ pues en ese caso la función z^n tiene de primitiva a $z^{n+1}/(n+1)$ (funciona para n negativos). Para $n = -1$ la integral da $2\pi i$ por la fórmula de Cauchy.

2.

$$\int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^{2n} \int_\gamma \begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix} z^{2(n-k)-1}\, dz = \int_\gamma \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} z^{-1}\, dz = 2\pi i \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$$

3. Si parametrizamos la curva γ por $\gamma(t) = e^{it}$ entonces

$$\int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} (e^{it} + e^{-it})^{2n} i \ dt = \int_0^{2\pi} 2^{2n} (\cos(t))^{2n} i dt = 2\pi i \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right)$$

entonces se despeja la integral pedida.