N^o de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Calificación (uso docente)

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Ej. 6	Ej. 7	**Total**

Importante

- El parcial dura tres horas
- De los siete ejercicios cada estudiante debe hacer sólo cuatro. Es importante entregar sólo cuatro ejercicios, sino el parcial no se corregirá.
- No se permite el uso de material.
- Cada ejercicio tiene una puntuación de 25 puntos.

Ejercicio 1

1. ¿Existe una transformación de Mobius, φ, tal que φ lleva el semiplano superior ($\{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}$) en la bola unidad cerrada $\overline{B(0,1)}$ y que además lleva la recta $Im(z) = Re(z)$, en el eje real? En caso de existir hallar una fórmula. *Sugerencia: estudiar los ángulos*.
2. ¿Existe una transformación de Mobius, φ, tal que φ lleva el semiplano superior ($\{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}$) en la bola unidad cerrada $\overline{B(0,1)}$? En caso de existir hallar una fórmula.
3. Sea $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F(\mathbb{C}) \subset \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}$. Probar que F es constante. *Sugerencia: usar la parte 2 y Liouville*.

Ejercicio 2

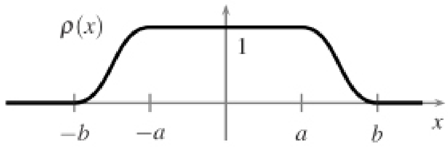
Sea $A = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, y = x^2, x \geq 0\}$

1. Probar que $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 0$ para todo camino cerrado γ con $Im\ \gamma \subset A$.
2. Probar que existe $F : A \to \mathbb{C}$ que es primitiva de $1/z$ en A y tal que $F(i) = i\pi/2$.
3. Para la F de la parte anterior, calcular $F(-i)$. *Sugerencia: integrar $1/z$ sobre un segmento de circunferencia que conecta i con $-i$ y usar que F es primitiva.*
4. Probar que la derivada de $\frac{e^{F(z)}}{z}$ es cero y concluir que $e^{F(z)} = z$ para todo $z \in A$.

Ejercicio 3

Sobre el teorema de los ceros

1. Sea $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^∞ como en la figura. ¿Existe una función holomorfa $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F(x) = \rho(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$?



2. Sea (z_i) una sucesión de numeros complejos distintos dos a dos ($z_i \neq z_j \ \forall i \neq j$). Probar que si una función holomorfa $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cumple $F(z_i) = 0 \, \forall i$ entonces $z_i \to \infty$ o $F(z) = 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. *Sugerencia: notar que si la sucesión z_i no converge a infinto entonces la sucesión entera se encuentra dentro de una bola de radio R con R grande. Usar que infinitos puntos en $B(0,R)$ acumulan en $\mathbb{C}$.*

Ejercicio 4

Sea $f : \mathbb{C} - \{1\} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{\frac{1}{(z-1)^2}}$.

1. Clasificar la singularidad $z = 1$.
2. ¿Cuál es la clausura de $f(B^*(1,r))$? Justifique brevemente. Aquí $B^*(1,r)$ es la bola de centro 1 y radio $r > 0$ pinchada, es decir, sin el elemento $z = 1$. *Sugerencia: usar la parte 1 simplifica el problema.*
3. Calcular $f(B^*(1,r))$.

Ejercicio 5

Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a > 1$. Calcular la siguiente integral.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{a + \sin\theta} d\theta.$$

Recordar que si $R(x,y)$ es un cociente de polinomios en las variables x e y tal que no se anula el denominador en la circunferencia unitaria, entonces

$$\int_0^{2\pi} R(cos\theta, sen\theta) d\theta = -i \int_\gamma R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z}$$

siendo γ la circunferencia unitaria recorrida en sentido antihorario.

Ejercicio 6

Sean dos conjuntos de números complejos $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ y $\{\beta_i\}_{i=1}^m$ con los α_j y β_i diferentes entre si y diferentes entre ellos y $n < m$. Sean las siguientes funciones racionales

$$F(z) := \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_m)}, \ G(z) := \sum_{k=1}^m \frac{\prod_{j=1}^n (\beta_k - \alpha_j)}{\prod_{j\neq k}^m (\beta_k - \beta_j)} \frac{1}{z - \beta_k}.$$

El objetivo de este ejercicio es probar que $F(z) = G(z)$, es decir, G es la descomposición en fracciones simples de F. Esto demuestra que vale la descomposición en fracciones simples.

1. Calcular los residuos de los polos de F y de los de G.

2. Sea $D(z) := F(z) - G(z)$. De lo anterior, deducir que D tiene singularidades evitables. *Pueden asumir que si f y g son dos funciones sin singularidades esenciales, entonces la resta de ellas también.*
3. Deducir que la función D se extiende a todo el plano complejo, $D : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, y es holomorfa.
4. Probar que la función D es acotada. *¿Cuánto vale* $\lim_{z\to\infty} D(z)$*?*
5. Probar que la función D es constante y deducir que $F = G$.

Ejercicio 7

Sea γ la circunferencia unidad recorrida en el sentido anithorario.

1. Demostrar que para $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma \frac{1}{z^n} dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

2. Calcular la integral

$$\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{z} dz$$

Para este cálculo será útil recordar la fórmula del binomio de Newton:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n\end{aligned}$$

3. Deducir el valor de $\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n}\, dt$.
