SOLUCION - Prueba Escrita
Funciones de Variable Compleja

Martes 15 de junio de 2021

Ejercicio 1 (25 puntos)

Consideremos la función $f(z) = \frac{iz+1}{z+i}$.

a) $|f(x)| = \frac{|ix+1|}{|x+i|} = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y como f es de Möbius lleva el eje real en la circunferencia unidad.

b) $f(x+iy) = \frac{i(x+iy)+1}{(x+iy)+i} = \frac{(1-y+ix)(x-i(1+y))}{x^2+(1+y)^2} = u(x,y) + iv(x,y)$, donde:

$$u(x,y) = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}$$
$$v(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(1+y)^2}$$

Tomando derivadas parciales se deduce que $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ y que $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$, por lo que u y v satisfacen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Como $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2 - \{(0,-1)\}$, son en particular diferenciables en este mismo conjunto, y podemos concluir que $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

c) Como f es holomorfa en el semiplano de parte imaginaria positiva, en particular su parte real, u, es armónica en $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Luego cumple que su laplaciano es nulo en S, y se verifica directamente que $u(x,0) = g(x,0) = \frac{2x}{(x^2+1)}$, por lo que $u(x,y) = g(x,y)$ es la función buscada.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Consideremos la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$.

a) Vemos que $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$ presenta dos polos simples en i y en $-i$, cuyos residuos son:

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{-i}{2e};$$
$$Res(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \frac{e}{-2i} = \frac{ei}{2}.$$

b) Probemos que la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{x^2+1}dx$ coincide con la siguiente integral compleja: $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz$, siendo C_R la curva cerrada orientada positivamente, con un primer tramo el segmento real $[-R,R]$ y un segundo tramo $\gamma(t) = Re^{it}$, con $t \in [0,\pi]$. En efecto, como f es holomorfa en $|z| > R > 1$ y $zf(z)$ tiende a 0 en el infinito, por el Lema de Jordan la integral sobre γ tiende a 0. Entonces:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = I,$$

donde se utiliza en el último paso que la integral de una función impar en un intervalo simétrico es 0, y por esta razón la parte imaginaria de la integral se anula. Por la parte (a) y el Teorema de los Residuos, concluimos que $I = 2\pi i Res(f,i) = \frac{\pi}{e}$.

Ejercicio 3 (25 puntos)

La prueba del Teorema de Liouville se detalla en la página 47 de las Notas de Teórico.

Ejercicio 4 (25 puntos)

a) Si $\varphi \in Mob(\mathbb{R})$, $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2)$ son tres puntos de la recta real distintos y alineados. Como las transformaciones de Möbius llevan la familia de rectas y circunferencias en sí misma, resulta que $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Recíprocamente, si $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ se tiene que existen tres puntos distintos z_0, z_1, z_∞ que podemos suponer en $\mathbb{R}$ tales que $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi(z_1) = 1$ y $\varphi(z_\infty) = \infty$. Entonces $\varphi(z) = \frac{(z-z_0)}{(z-z_\infty)} \frac{(z_1-z_\infty)}{(z_1-z_0)}$, y sus coeficientes son reales. Notar que si alguno de los puntos z_0, z_1, z_∞ fuese infinito hay cancelación en $\hat{\mathbb{C}}$, y la expresión anterior define una transformación de Möbius. Por ejemplo si $z_1 = \infty$ tenemos que $\varphi(z) = \frac{(z-z_0)}{(z-z_\infty)}$.

Por último, como las transformaciones de Möbius tienen estructura de grupo, aplicando la inversa φ^{-1} a la igualdad $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ resulta que $\mathbb{R} = \varphi^{-1}(\mathbb{R})$, y por la equivalencia anterior tenemos que $\varphi \in Mob(\mathbb{R})$.

b) Como $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, solo hay dos posibilidades: $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ o $\varphi(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$. Por lo tanto alcanza con verificar que algún elemento de $\mathbb{H}$ se mantiene en $\mathbb{H}$ al aplicarle φ. Siguiendo la sugerencia y suponiendo $c > 0$ alcanza con tomar $z_0 = \frac{i-d}{c}$, donde se verifica que $\varphi(z_0)$ tiene parte imaginaria positiva si y sólo si $ad - bc > 0$.

c) Si z_1 y z_2 pertenecen a una misma recta que contiene al origen, la homotecia $\varphi(z) = rz$ con $r = |z_2|/|z_1|$ lleva z_1 en z_2. Si z_1 y z_2 tienen misma parte imaginaria, la traslación $\varphi(z) = z + b$ con $b = Im(z_2 - z_1) \in \mathbb{R}$ lleva z_1 en z_2. Finalmente, si no estamos en ninguno de los dos casos anteriores, primero igualamos la parte imaginaria con una homotecia, llevando z_1 a un $\hat{z_1}$, y luego con una traslación llevamos $\hat{z_1}$ a z_2.