Prueba Escrita
Funciones de Variable Compleja

Martes 15 de junio de 2021

Ejercicio 1 (25 puntos)

Consideremos la función $f(z) = \frac{iz+1}{z+i}$.

a) Probar que f lleva el eje real en una circunferencia.

b) Probar que f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Usar las condiciones de Cauchy-Riemann.

c) Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Hallar $g : S \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2} = 0,$$

y que además cumple la condición de borde $g(x,0) = \frac{2x}{(x^2+1)}$.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Consideremos la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$.

a) Calcular los residuos en cada una de sus singularidades.

b) Calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{x^2+1} dx$

Ejercicio 3 (25 puntos)

El Teorema de Liouville afirma que "*Toda función entera y acotada es constante*". Haremos la prueba en tres partes:

a) Expresar la fórmula integral de Cauchy para la derivada enésima $f^{(n)}(a)$.

b) Probar que si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$. Para ello, tomar la integral anterior sobre la curva $\gamma(t) = a + \rho e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi)$.

c) Demostrar el Teorema de Liouville. *Sugerencia: usar $n = 1$ y tomar $\rho \to \infty$.*

Ejercicio 4 (25 puntos)

Consideremos los siguientes conjuntos de funciones:

- $Mob(\mathbb{C}) = \{\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0\}$
- $Mob(\mathbb{R}) = \{\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0\} \subseteq Mob(\mathbb{C})$
- $Mob^+(\mathbb{R}) = \{\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0\} \subseteq Mob(\mathbb{C})$

a) Probar que, dada $\varphi \in Mob(\mathbb{C})$, se verifica $\varphi \in Mob(\mathbb{R})$ si y sólo si $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Aquí pensamos a $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Deducir que si $\varphi \in Mob(\mathbb{R})$ entonces φ^{-1} también.

b) Sea $\mathbb{H} = \{z = a + bi \in \mathbb{C} : b > 0\}$ el semiplano complejo con parte imaginaria positiva. Probar que, dada $\varphi \in Mob(\mathbb{C})$, $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ si y solo si $\varphi \in Mob^+(\mathbb{R})$, *Sugerencia: probar primero si $c = 0$, y si $c \neq 0$ usar que $\varphi(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d}$. Considerar la imagen de z_0 donde $z_0 \in \mathbb{H}$ es tal que $cz_0 + d$ es imaginario puro.*

c) Probar que $Mob^+(\mathbb{R})$ *actúa transitivamente* en $\mathbb{H}$, esto es, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, existe $\varphi \in Mob^+(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(z_1) = z_2$.