Universidad de la República **Funciones de Variable Compleja**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Julio 2020**

PRUEBA FINAL – SÁBADO 11 DE JULIO DE 2020

Ejercicio 1.(15 pts.) Sea $f(z) = \frac{z^2-i}{z^2+i}$. Hallar la imagen por f del primer cuadrante. (Sugerencia: considerar la transformación de Möbius $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$)

Solución Consideremos la función $g(z) = z^2$. Podemos expresar f por medio de la siguiente composición: $f(z) = T \circ g(z)$.

Si $z_0 = re^{i\theta}$ entonces $g(z_0) = r^2 e^{i2\theta}$. Luego g transforma el primer cuadrante en el semiplano superior $H = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$.

Para estudiar cómo transforma T el semiplano superior basta ver cuál es la imagen de la recta real. Sabiendo que T manda una recta en una recta o una circunferencia calculamos por T de tres puntos de dicha recta:

- $T(0) = -1$
- $T(\infty) = 1$
- $T(1) = -i$

De esto deducimos que $T(H) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (la circunferencia de centro 0 y radio 1). Además, sabemos que $T(i) = 0$ por lo que el semiplano superior va en el interior de la circunferencia de centro 0 y radio 1.

Ejercicio 2.(20 pts.) Consideramos la función $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = sen\left(\frac{2\pi}{z^2}\right)$$

a) Halle los $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $f(z) = 0$.

b) Demuestre que la función f no se puede extender de forma holomorfa a todo el plano complejo.

Solución

1. Sabemos que $sen(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Esta función sólo puede valer 0 cuando $e^{iz} = e^{-iz}$, lo que implica que $e^{2iz} = 1$ o que $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

   Luego, para que $f(z) = 0$ se debe cumplir que $\dfrac{2\pi}{z^2} = k\pi$, lo que es lo mismo, que $z = \pm\sqrt{2}/\sqrt{k}$.

2. Supongamos que f se extiende a $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Los ceros de $\tilde{f}$ acumulan en 0, por lo que f debería ser la función nula, lo que es absurdo.

Ejercicio 3.(20 pts.) Sean $f(z) = z^4 + 3z^3 + 2$ y $g(z) = \dfrac{e^{4z}}{z^2+1}$.

a) Hallar la integral $\int_C f(z)dz$ donde $C = \{e^{it} + 1 : t \in [0, 2\pi]\}$.

b) Hallar las integrales $\int_{\gamma_1} g(z)dz$ e $\int_{\gamma_2} g(z)dz$ donde γ_1 y γ_2 son las curvas de la figura 1.

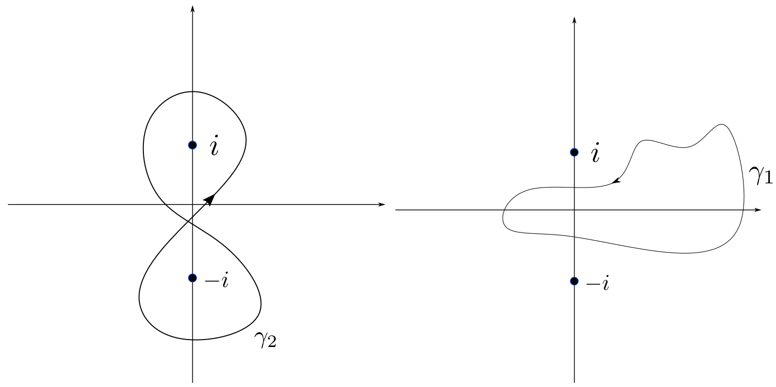

Figura 1: Curvas del ejercicio b)

Solución

1. $\int_C f(z)dz = 0$ pues f tiene primitiva. Su primitiva es $F(z) = \dfrac{z^5}{5} + \dfrac{3z^4}{4} + 2z$.

2. γ_1 es homóloga a 0 en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, que es el dominio de g. Esto es porque $Ind_{\gamma_1}(i) = Ind_{\gamma_1}(-i) = 0$. Luego, $\int_{\gamma_1} g(z)dz = 0$

   Ahora vamos a calcular $\int_{\gamma_2} g(z)dz$. Otra forma de escribir la función es $g(z) = \dfrac{e^{4z}}{(z+i)(z-i)}$. Además podemos dividir la curva en dos curvas cerradas simples, γ_2^1 y γ_2^2, una con índice 1 respecto a i y otra con índice -1 respecto a $-i$. Luego, $\int_{\gamma_2} g(z)dz = \int_{\gamma_2^1} g(z)dz + \int_{\gamma_2^2} g(z)dz$.

   Consideramos la función $g_1(z) = \dfrac{e^{4z}}{z+i}$. Por el teorema de Cauchy global tenemos que

$$g_1(i) Ind_{\gamma_2^1}(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2^1} \frac{g_1(w)}{w-i} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2^1} g(w)dw$$

   Luego, $\int_{\gamma_2^1} g(z)dz = 2\pi i g_1(i) = 2\pi i e^{4i}/2i = \pi e^{4i}$.

   Análogamente para $g_2(z) = \dfrac{e^{4z}}{z-i}$ concluimos que $\int_{\gamma_2^2} g(z)dz = -2\pi i g_2(-i) = -2\pi i e^{-4i}/(-2i) = \pi e^{-4i}/(-2i) = \pi e^{-4i}$.

   Finalmente $\int_{\gamma_2} g(z)dz = \pi e^{4i} + \pi e^{-4i} = 2\pi cos(4)$

Ejercicio 4.(15 pts.) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $u(x,y) = Re(f(z))$. Supongamos que existe $M > 0$ tal que $u(x,y) < M$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es constante.
Sugerencia : Considerar la función $g(z) = e^{f(z)}$.

Solución Consideremos la función $g(z) = e^{f(z)}$. Tenemos que $|g(z)| = e^{Re(f(z))} \leq e^M$. Como g es una función entera y acotada, esto quiere decir que es contante. Esto implica que $e^{f(z)} = z_0 \in \mathbb{C}$. Si elegimos una rama del logaritmo concluimos que, para todo $z \in \mathbb{C}$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = log(z_0) + 2k\pi i$. Sin embargo, f es una función continua, por lo que concluimos que es constante.

Ejercicio 5.(30 pts.) Indicar si cada una de las afirmaciones es verdadera o falsa, justificando brevemente su respuesta.

a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable. Se sabe que

$$D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} x+y & -x \\ y & 2x \end{pmatrix}$$

Entonces f es holomorfa en el punto $1+i$.

b) Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$. Sabemos que el desarrollo de Laurent de f alrededor de z_0 en $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ es $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n(z-z_0)^n$ y que $f(z_0) = a_0$. Además, $a_n = 0$ para todo $n < 0$. Entonces f es holomorfa en z_0.

c) Sea f una función holomorfa en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, y $\gamma : [0,1] \to \Omega$ una curva cerrada. Entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

d) Se sabe que $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ siempre que γ_1 y γ_2 sean curvas en la región $\Omega \subset \mathbb{C}$ con los mismos extremos. Entonces f es holomorfa en Ω.

e) Sea γ el borde de la circunferencia de centro 0 y radio 5. Entonces: $\int_\gamma \frac{1}{z} + \frac{1}{z-2} + 8z^6 + 3z^3 dz = 4\pi i$

Solución

a) Tenemos que el diferencial en $(1,1)$ de la función vale

$$D_{(1,1)}f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De esto podemos deducir que, si $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ entonces $u_x(1,1) = v_y(1,1)$ y $u_y(1,1) = -v_x(1,1)$. Como f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann entonces es holomorfa en $(1,1)$, y por lo tanto la afirmación es **verdadera**.

b) Como todos los términos negativos del desarrollo valen cero, tenemos que el desarrollo de Laurent es en realidad una serie de potencias alrededor de z_0. Como f es representable en series de potencias en z_0 concluimos que es holomorfa en dicho punto.

c) Si tomamos $\gamma = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ entonces $\int_\gamma \dfrac{1}{z} = 2\pi i$. Además esta función es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ Por este contraejemplo concluimos que la afirmación es **falsa**.

d) La condición de la afirmación indica que f tiene primitiva holomorfa F (es decir, que $F' = f$). Para definir esta primitiva consideramos un punto $z_0 \in \Omega$ y tomamos la función $F(z) = \int_\gamma f(w)dw$, donde γ es una curva en Ω con extremos z_0 y z. La condición de la afirmación nos asegura que F está bien definida.

Como F es holomorfa es representable en series de potencias, y por lo tanto su derivada también lo es. Como f es representable en series de potencias es holomorfa y la afirmación es **verdadera**.

e) Podemos calcular las integrales por separado. $\int_\gamma \dfrac{1}{z} = \int_\gamma \dfrac{1}{z-2} = 2\pi i$ pues γ tiene índice 1 alrededor de ambos puntos. Las otras funciones tienen primitiva y por lo tanto su integral es 0. Por este motivo concluimos que la afirmación es **verdadera**.