Solución prueba final - 18 de mayo de 2019.

Ejercicio 1.
Sea $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una transformación de Möbius tal que

$$T(z) = \frac{2z - i}{-iz - 2}.$$

1. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Probar que $T(D) = D$.
2. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las rectas por el origen. Probar que existe un único elemento r_0 de $\mathcal{F}$ tal que $T(r_0)$ es una recta.
3. Hallar explícitamente la recta $T(r_0)$.

Parte 1. Primero vamos a probar que $T(\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. Como las transformaciones de Möebius llevan rectas y circunferencias en rectas y circunferencias, es suficiente mostar que $|T(1)| = |T(i)| = |T(-1)| = 1$.

$$|T(1)| = \left|\frac{2 - i}{-i - 1}\right| = 1, \quad |T(i)| = \left|\frac{2i - i}{-ii - 1}\right| = 1, \quad |T(-1)| = \left|\frac{-2 - i}{i - 2}\right| = 1.$$

Ahora, como las transformaciones de Möbius son continuas y biyectivas, el interior del disco va al interior del disco, o al exterior. Basta entonces con ver que $T(0) = \frac{i}{2} \in D$ para concluir que $T(D) = D$. También se puede utilizar un argumento con el hecho de que Möebius preserva orientación.

Parte 2. Dada una recta r_0 por el origen, $T(r_0)$ es una recta si y solo $\infty \in T(r_0)$ si y solo si $2i \in r_0$ (ya que $T(2i) = \infty$). La única recta que pasa por el orgien y por el punto $2i$ es el eje Oy.

Parte 3.. Por la parte anterior, $T(r_0)$ es la recta que pasa por $T(0) = \frac{i}{2}$ y por $T(i) = -i$. O sea el eje Oy.

Ejercicio 2.

1. Defina función meroforma.
2. Sea f meromorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$, con f distinta de la función nula.
   a) Probar que si $a \in \Omega$ es un cero o un polo de f entonces a es un polo de $f^{'}/f$.
   b) Si a es un polo de $f^{'}/f$ entonces a es un cero o un polo de f.
3. Probar el siguiente resultado: Sea γ un camino cerrado en un abierto conexo Ω, tal que $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$, $\forall a \notin \Omega$. Supongamos que $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ solo puede tomar valores 0 y 1 y sea $\Omega_1 = \{a \in \Omega : \ \ \mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1\}$. Sea f una función meromorfa en Ω, f no nula, N_f el número de ceros de f en Ω_1 contando su multiplicidades y P_f el número de polos en Ω_1. Si f no tiene ceros ni polos en γ^* entonces

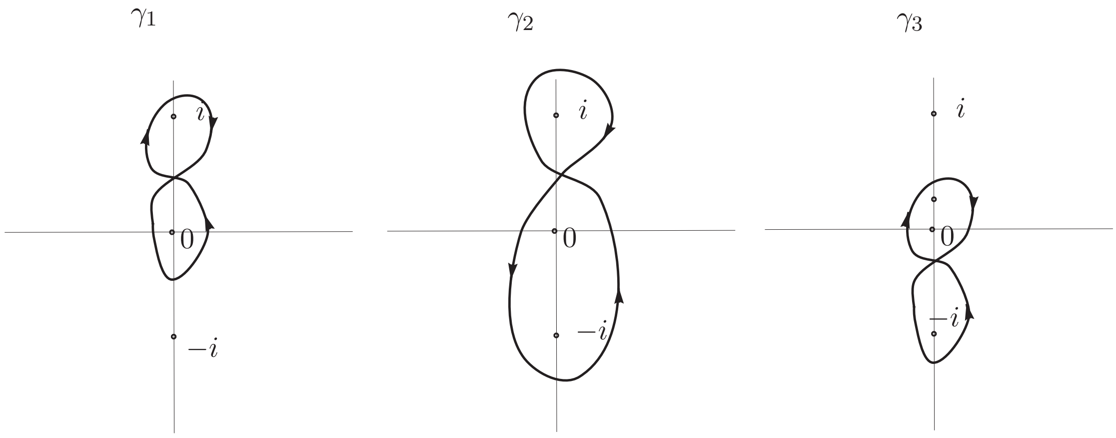
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz = N_f - P_f = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0).$$

Ver notas 2019.

Ejercicio 3.(25 puntos)
Sean $A = \{i, 0, -i\}$, $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$ con todos los elementos de A polos de orden uno.
Sean γ_1, γ_2 y γ_3 tres caminos como en la figura 1, con $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \pi i$, $\int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i$ y $\int_{\gamma_3} f(z)dz = -2\pi i$. Se sabe además que $f(1) = 1$ y que $f'(1) = 2$. Calcular

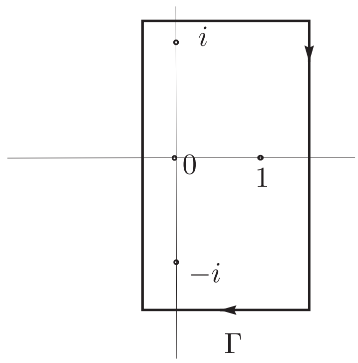
$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz, \text{ siendo } \Gamma \text{ el camino de la figura 2 .}$$

Figura 1:



(a)

Figura 2:



(a)

Usando el teorema de Residuos tenemos que:

- $\int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i(Res(0) - Res(i)) = \pi i,$
- $\int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i(Res(0) - Res(i) + Res(-i)) = 2\pi i$ y

- $\int_{\gamma_3} f(z)dz = 2\pi i(Res(-i) - Res(0)) = -2\pi i$

Resolviendo el sistema queda que $Res(0) = 3/2$, $Res(i) = 1$ y $Res(-i) = 1/2$.

Consideramos ahora la función $g(z) = \frac{f(z)}{(z-1)^2}$. Como f tiene un polo de orden uno en $z = 0$, entonces $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$ y $\lim_{z\to 0} zf(z)$ es distinto de cero y distinto de infinito. Entonces $\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 0} f(z). \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z-1)^2} = \infty$, lo que implica que $z = 0$ es un polo para g.
Como $\lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0} zf(z). \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z-1)^2}$ y es distinto de cero y distinto de infinito, entonces $z = 0$ es un polo de orden uno para g. Por lo tanto

$$Res(0, g) = \lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0} zf(z). \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z-1)^2} = Res(0, f),1 = 3/2.$$

Un razonamiento análogo muestra que $z = i$ y $z = -i$ son polos de orden uno para g.

$Res(i, g) = \lim_{z\to i}(z - i)g(z) = \lim_{z\to i}(z - i)f(z). \lim_{z\to i} \frac{1}{(z-1)^2} = Res(i, f). \frac{1}{(i-1)^2}$.
$Res(-i, g) = \lim_{z\to -i}(z + i)g(z) = \lim_{z\to -i}(z + i)f(z). \lim_{z\to -i} \frac{1}{(z-1)^2} = Res(-i, f). \frac{1}{(-i-1)^2}$.
Como $f(1) = 1$ entonces $\lim_{z\to 1} g(z) = \lim_{z\to 1} \frac{f(z)}{(z-1)^2} = \infty$, por lo tanto $z = 1$ es un polo para g.
Como $\lim_{z\to 1}(z - 1)^2 g(z) = \lim_{z\to 1}(z - 1)^2 \frac{f(z)}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 1} f(z) = 1$, entonces $z = 1$ es un polo de orden dos para g. Por lo tanto $Res(1, g) = \lim_{z\to 1}((z - 1)^2 g(z))' = \lim_{z\to 1} f'(z) = 2$.
Consecuentemente tenemos que

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i(-Res(0, g) - Res(i, g) - Res(-i, g) - Res(1, g)).$$

Ejercicio 4.
Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = 2e^{it}$.

1. Probar que
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^3 + 1} = 0$$
2. Calcular
$$\int_\gamma \frac{e^z - 1 - z}{1 - cos(z)} dz.$$

Parte 1. Como $\lim_{z\to\infty} z. \frac{1}{z^3+1} = 0$, entonces por el lema de deformación de caminos se tiene que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^3+1} = 0$, siendo $\gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_R(t) = Re^{it}$.
Como γ y γ_R (con $R > 1$) son homotópicas entonces, por Cauchy, $\int_\gamma \frac{dz}{z^3+1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^3+1}$. Lo que implica que $\int_\gamma \frac{dz}{z^3+1} = 0$. Otra forma de verlo es calcular la integral por el método de los residuos.

Parte 2. Aplicando L'Hopital dos veces tenemos que

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1 - z}{1 - cos(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{sen(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{cos(z)} = 1.$$

Por lo tanto $z = 0$ es un singularidad evitable para la función $\frac{e^z-1-z}{1-cos(z)}$. Luego, por el Teorema de Cauchy, $\int_\gamma \frac{e^z-1-z}{1-cos(z)} dz = 0$.