**Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.**
**Curso: Funciones de variable compleja. Año 2019.**

Prueba final - 18 de mayo de 2019. Duración: 4 hrs.

| No. Prueba | Apellido y nombre | Cédula | Firma |
|---|---|---|---|
| | | | |

| PARA USO DOCENTE | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ej 1 | Ej 2 | Ej 3 | Ej4 | **Total** |
| | | | | |

**Ejercicio 1.** (25 puntos)
Sea $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una transformación de Möbius tal que

$$T(z) = \frac{2z - i}{-iz - 2}.$$

1. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Probar que $T(D) = D$.(10 puntos)
2. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las rectas por el origen. Probar que existe un único elemento $r_0$ de $\mathcal{F}$ tal que $T(r_0)$ es una recta.(8 puntos)
3. Hallar explícitamente la recta $T(r_0)$.(7 puntos)

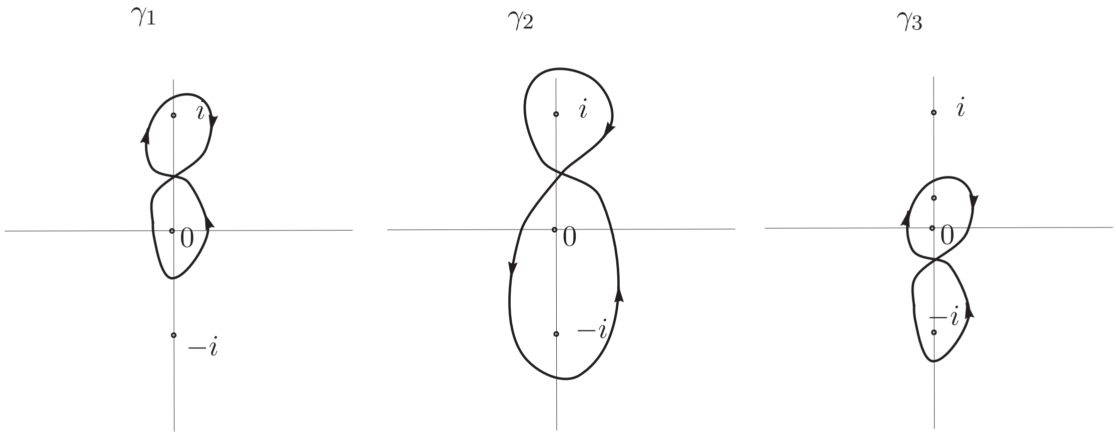
**Ejercicio 2.**(30 puntos)

1. Defina función meroforma.(2 puntos)
2. Sea $f$ meromorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$, con $f$ distinta de la función nula.
   a) Probar que si $a \in \Omega$ es un cero o un polo de $f$ entonces $a$ es un polo de $f'/f$.(10 puntos)
   b) Si $a$ es un polo de $f'/f$ entonces $a$ es un cero o un polo de $f$.(5 puntos)
3. Probar el siguiente resultado: Sea $\gamma$ un camino cerrado en un abierto conexo $\Omega$, tal que $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$, $\forall a \notin \Omega$. Supongamos que $\text{Ind}_\gamma(a)$ solo puede tomar valores 0 y 1 y sea $\Omega_1 = \{a \in \Omega : \ \text{Ind}_\gamma(a) = 1\}$. Sea $f$ una función meromorfa en $\Omega$, $f$ no nula, $N_f$ el número de ceros de $f$ en $\Omega_1$ contando su multiplicidades y $P_f$ el número de polos en $\Omega_1$. Si $f$ no tiene ceros ni polos en $\gamma^*$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_f - P_f = \text{Ind}_{f\circ\gamma}(0).\text{(13 puntos)}$$

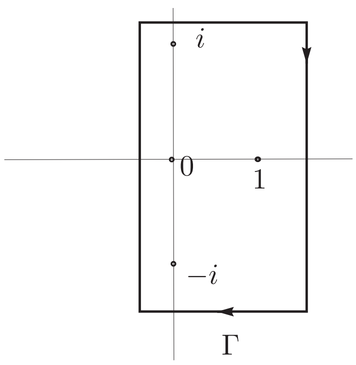
**Ejercicio 3.**(25 puntos)
Sean $A = \{i, 0, -i\}$, $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$ con todos los elementos de $A$ polos de orden uno.

Figura 1:




(a)

Figura 2:




(a)

Sean $\gamma_1, \gamma_2$ y $\gamma_3$ tres caminos como en la figura 1, con $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \pi i$, $\int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i$ y $\int_{\gamma_3} f(z)dz = -2\pi i$. Se sabe además que $f(1) = 1$ y que $f^{'}(1) = 2$. Calcular

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz, \text{ siendo } \Gamma \text{ el camino de la figura 2 .}$$

**Ejercicio 4.**(20 puntos)
Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = 2e^{it}$.

1. Probar que
$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^3 + 1} = 0 \quad \text{(10 puntos)}$$

2. Calcular
$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1 - z}{1 - cos(z)} dz. \quad \text{(10 puntos)}$$