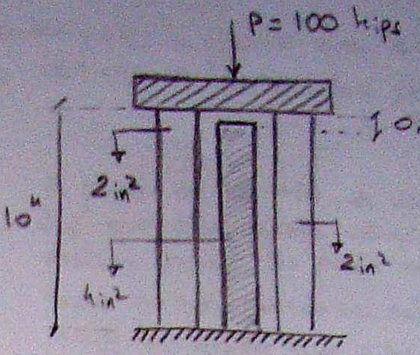
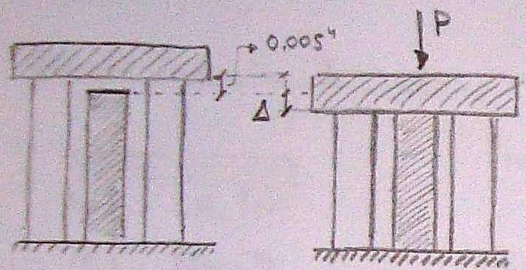
Ej 8 - Práctico 2

Acero $\begin{cases} E = 30 \cdot 10^{6} \text{ psi} \\ \alpha = 11,7 \cdot 10^{-6} \ 1/°C \end{cases}$ **Aluminio** $\begin{cases} E = 10 \cdot 10^{6} \text{ psi} \\ \alpha = 23,2 \cdot 10^{-6} \ 1/°C \end{cases}$



1 kip → 1000 lb
1 ksi → 1000 psi

a) Al aplicar la carga P, las barras de aluminio se comprimen. Si P es suficientemente grande las barras se comprimen una distancia δ mayor a 0,005 in y a partir de este punto también se comprime el acero. Suponemos que P es suficientemente grande como para comprimir al acero una distancia Δ como se muestra abajo:

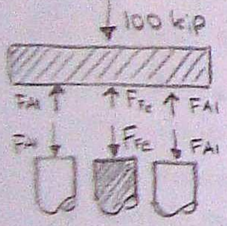


sin aplicar P — con P aplicada

Como se puede ver, si el acero se comprime una distancia Δ, el aluminio se comprime $\Delta + 0,005$.

$$\varepsilon \equiv \frac{\Delta L}{L_0} \longrightarrow \begin{cases} \varepsilon_{Fe} = \dfrac{\Delta}{9,995} \cong \dfrac{\Delta}{10} \\ \varepsilon_{Al} = \dfrac{\Delta + 0,005}{10} \end{cases}$$

El diagrama de cuerpo libre del rígido es el siguiente:



Balance mecánico al rígido: $100 \text{ kip} = 2 F_{Al} + F_{Fe}$ (1)

Elasticidad de barras:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$F = A \cdot \sigma \longrightarrow \begin{cases} F_{Fe} = (A \cdot E \cdot \varepsilon)_{Fe} \\ F_{Al} = (A \cdot E \varepsilon)_{Al} \end{cases}$$

Sustituyendo las expresiones de F_{Fe} y F_{Al} en (1) y empleando las ecuaciones de ε_{Fe} y ε_{Al} se tiene:

$$100 \cdot 10^{3} \text{ lb} = 2 \times \left(10 \cdot 10^{6} \text{ psi} \times 2 \text{ in}^2 \times \frac{\Delta + 0,005}{10} \right) + 30 \cdot 10^{6} \text{ psi} \times 4 \text{ in}^2 \times \frac{\Delta}{10}$$

$$\Rightarrow \Delta = 0,005 \text{ in} \longrightarrow \begin{cases} \sigma_{Fe} = 15 \text{ ksi} \\ \sigma_{Al} = 10 \text{ ksi} \end{cases}$$

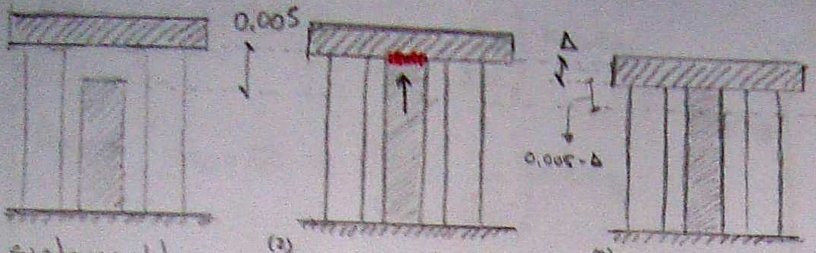
Obs: Se partió suponiendo que el acero llegaba a comprimirse, si esto no fuera así el sistema de ecuaciones daría resultados sin sentido físico. Otra forma de corroborar es hacer la cuenta

$$P' = 2 \times \left(2 \text{ in}^2 \times 10 \cdot 10^{6} \text{ psi} \times \frac{0,005}{10} \right) = 20 \text{ kip}$$

para fuerzas superiores el acero se comprime

Ptico2: (b)

Se pega la barra de acero y se retira P, es exactamente lo mismo que estirar la barra de acero hasta el rigido, soldarlo y luego retirar la fuerza sobre el acero



(1) sistema libre de fuerzas

(2) Se estira el acero hasta tocar el rigido y se pega

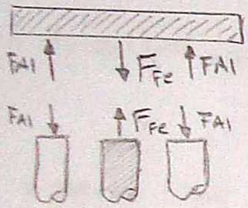
(3) se libera el sistema

Al pasar de (2) → (3), el acero que fué estirado quiere volver a la posición normal. No puede volver del todo porque cuando se achica hace bajar el rigido que a su vez comprime el aluminio ⟹ El acero se queda en el camino entre el largo hasta llegar al rigido y su largo original.

Se concluye que en resultado el rigido desciende una distancia Δ, osea que:

rigido desciende $\Delta \rightarrow \begin{cases} \text{Aluminio se } \underline{\text{comprime}}\ \Delta & \rightarrow \varepsilon_{Al} = \Delta/10 \\ \text{Acero se } \underline{\text{estira}}\ 0{,}005-\Delta & \rightarrow \varepsilon_{Fe} = \dfrac{0{,}005-\Delta}{9{,}995} \cong \dfrac{0{,}005-\Delta}{10} \end{cases}$

Balance mecánico al rigido:



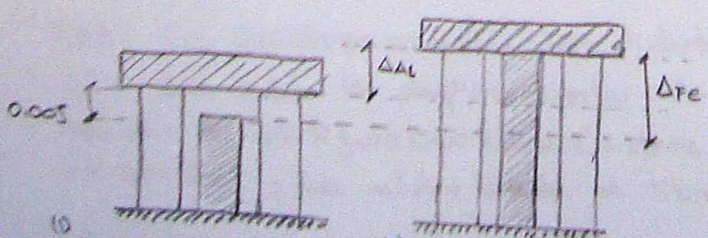
$$F_{Fe} = 2 \times F_{Al} \qquad \Delta_{Al} = \Delta \qquad \Delta_{Fe} = 0{,}005 - \Delta$$

$$30.10^6\,psi \times \frac{0{,}005-\Delta}{10} \times 4 in^2 = 2 \times \left(10.10^6\,psi \times \frac{\Delta}{10} \times 2 in^2 \right)$$

$$\Delta = 0{,}0038 \longrightarrow \begin{cases} \sigma_{Al} = 3{,}75 \text{ ksi} \\ \sigma_{Fe} = 3{,}75 \text{ ksi} \end{cases}$$

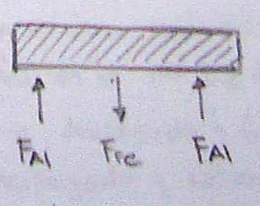
(c) Vimos que el acero está traccionado y los aluminios comprimidos. $\alpha_{Al} > \alpha_{Fe}$ por lo que la temperatura alarga en mayor proporción al aluminio que al acero, por lo tanto al calentar el sistema el acero se traccionará mas aún y en consecuencia los aluminios se comprimen más.

Por otro lado, si nos imaginamos al sistema libre de fuerzas, con el acero despegado (como en la parte "a" pero sin P) al calentar el acero 50°C este se estira $\delta_T = L_0 \times \alpha_{Fe} \times \Delta T \approx 0{,}0058\,in$. Si se lo suelda, segun los razonamientos anteriores, la barra se tracciona por lo que se estira un poco mas. El resultado es que en la suma de ambos procesos, la barra de acero está por encima del nivel del rigido en el sistema libre de fuerzas y despegado:



(1) sistema libre de fuerzas con acero despegado

(2) Acero pegado + ΔT=50°C



$$F_{Fe} = 2 F_{Al}$$

$$\Delta \equiv L \times \varepsilon$$

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_s + \varepsilon_T$$

$\varepsilon_T \longrightarrow \alpha \times \Delta T$

$\varepsilon_s \longrightarrow \sigma/E$ (OJO: es positivo en tracción y negativo en compresión)

Ej8. Práct2: (c)

El sistema de ecuaciones resultante es:

$$\begin{cases} F_{Fe} = 2 \times F_{Al} \\ \Delta_{Al} = \left(\alpha_{AL} \times \Delta T - \dfrac{F_{Al}}{A_{Al}} \cdot \dfrac{1}{E_{Al}} \right) \times Lo_{Al} \\ \Delta_{Fe} = \left(\alpha_{Fe} \times \Delta T + \dfrac{F_{Fe}}{A_{Fe}} \cdot \dfrac{1}{E_{Fe}} \right) \times Lo_{Fe} \\ \Delta_{Fe} = 0{,}005 + \Delta_{Al} \end{cases} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{l} F_{Al} \simeq 16{,}13 \text{ kips} \\ F_{Fe} \simeq 32{,}26 \text{ kips} \\ |\sigma_{Fe}| = |\sigma_{Al}| \simeq 8{,}1 \text{ ksi} \\ \Delta_{Fe} = 0{,}0085'' \\ \Delta_{Al} = 0{,}0035'' \end{array} \right.$$

$A_{Al} = 2 \text{ in}^2$ $\quad A_{Fe} = 4 \text{ in}^2$

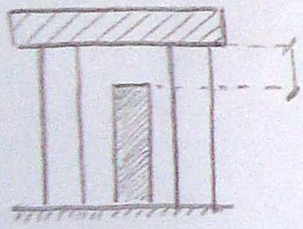
$Lo_{Al} = 10 \text{in}$ $\quad Lo_{Fe} = 10 \text{ in}$

Otra forma para (c):

Si se aumenta 50°C el sistema libre despegado:

$$\delta_T = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot Lo \longrightarrow \begin{cases} \delta_{TFe} = 11{,}7 \cdot 10^{-6} \, 1/°C \times 50°C \times 10 \text{in} \cong 0{,}0058 \\ \delta_{TAl} = 23{,}2 \cdot 10^{-6} \, 1/°C \times 50°C \times 10 \text{in} = 0{,}0116 \end{cases}$$

El sistema libre, despegado y caliente es:



$$(Lo_{Al} + 0{,}0116) - (Lo_{Fe} + 0{,}0058) = 0{,}005 - (0{,}0058 - 0{,}0116) = 0{,}0108''$$

Luego se razona igual que en la parte b, osea, al pegar el acero al rígido, el rígido desciende una distancia Δ y las deformaciones en las barras quedan:

$\Delta_{Al} = \Delta$ en compresión

$\Delta_{Fe} = 0{,}0108 - \Delta$ en tracción $\longrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{Al} = 0{,}0081'' \\ \Delta_{Fe} = 0{,}0027'' \\ F_{Fe} \cong 32{,}4 \text{ kips} \\ F_{Al} \cong 16{,}2 \text{ kips} \end{array} \right.$

$F_{Fe} = 2 F_{Al}$

$$F_{Fe} = 4 \text{in}^2 \times 30 \cdot 10^6 \text{psi} \times \frac{0{,}0108 - \Delta}{10}$$

$$F_{Al} = 2 \text{in}^2 \times 10 \cdot 10^6 \text{psi} \times \frac{\Delta}{10}$$

Obs: Los desplazamientos son distintos en ambos métodos ¿Porqué?

Sean Δ_{Fe}' y Δ_{Al}' los desplazamientos calculados en el 1er método, estos miden desde la configuración cero (sistema libre, despegado y frío) y en el segundo método Δ_{Fe} y Δ_{Al} miden desde el libre despegado y caliente:

$$\Delta_{Al}' = 0{,}0116 - \Delta_{Al} = 0{,}0035''$$

$$\Delta_{Fe}' = 0{,}0058 + \Delta_{Fe} = 0{,}0085''$$