Clase 12: Comparación de dos muestras

Matías Carrasco

5 de octubre de 2019

Índice

1. Comparación de dos muestras independientes

Como vimos en las clases sobre test de permutaciones, una tarea común en la investigación es comparar dos poblaciones o grupos. Los investigadores pueden desear comparar el nivel de ingresos de dos regiones, el contenido de nitrógeno de dos lagos o la efectividad de dos medicamentos. Una pregunta inicial que surge es qué aspectos (parámetros) de las poblaciones deben compararse. Podríamos considerar comparar los promedios, las medianas, las desviaciones estándar, las formas de las distribuciones o los valores máximos. El parámetro de comparación depende de cada problema particular.

La comparación más común de dos distribuciones es la comparación de las medias. Si podemos asumir con seguridad que los datos en cada grupo se ajustan a una distribución normal, podemos usar un test t de dos muestras para comparar las medias de estas dos poblaciones. Es lo que haremos en esta clase, partiendo de los IdC para definir un TdH.

La diferencia de lo que haremos en esta clase con lo que hicimos con los test de permutaciones es que ahora supondremos un modelo poblacional. Supondremos que disponemos de dos muestras aleatorias independientes, una para cada población.

Consideremos dos muestreos aleatorios

$$X_1, \ldots, X_n \quad \text{e} \quad Y_1, \ldots, Y_m$$

independientes entre ellos. Supondremos que tanto X como Y tienen distribución normal, con media y varianza desconocidas, pero que X e Y tienen la misma varianza:

$$X \sim N(\mu_X, \sigma^2), \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2).$$

La diferencia de los promedios muestrales

$$\overline{X} - \overline{Y}$$

es una combinación lineal de variables normales independientes, por lo que también tiene distribución normal.

Como

$$\mathbf{E}\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=\mu_X-\mu_Y,\quad \mathbf{var}\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}=\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right),$$

la diferencia de promedios tiene distribución

$$N\left(\mu_X-\mu_Y,\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right).$$

Denotemos por S_X^2 y S_Y^2 las varianzas muestrales

$$S_X^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_Y^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2.$$

Entonces

$$(n-1)S_X^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1),\quad (m-1)S_Y^2/\sigma^2\sim\chi^2(m-1).$$

Como son independientes, la suma también tiene distribución χ^2:

$$\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m+n-2).$$

Definimos la varianza muestral *agrupada* S^2 como

$$S^2=\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}.$$

Entonces, si formamos el producto

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\cdot\frac{\sigma}{S}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$$

tiene distribución

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(m+n-2)}{m+n-2}}}=t(m+n-2)$$

que es por definición la distribución t de Student con $n+m-2$ grados de libertad.

Tenemos entonces el estadístico que precisamos para construir un IdC para la diferencia $\mu_X-\mu_Y$ de las medias.

Consideremos un nivel de confianza $1-\alpha$. Entonces

$$\mathbf{P}\left(\left|\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)\right|\leq t\cdot S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right)=\mathbf{P}\left(|T|\leq t\right)=1-\alpha$$

si, y solamente si, t es el valor crítico $t_{n+m-2}(\alpha/2)$ asociado a la probabilidad de cola $\alpha/2$.

Un IdC (exacto) para la diferencia de medias $\mu_X-\mu_Y$ al nivel de confianza $1-\alpha$ es

$$I_\alpha=\left[\ \overline{X}-\overline{Y}\pm t_{n+m-2}(\alpha/2)S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\ \right]$$

en donde S^2 denota la varianza agrupada de las dos muestras.

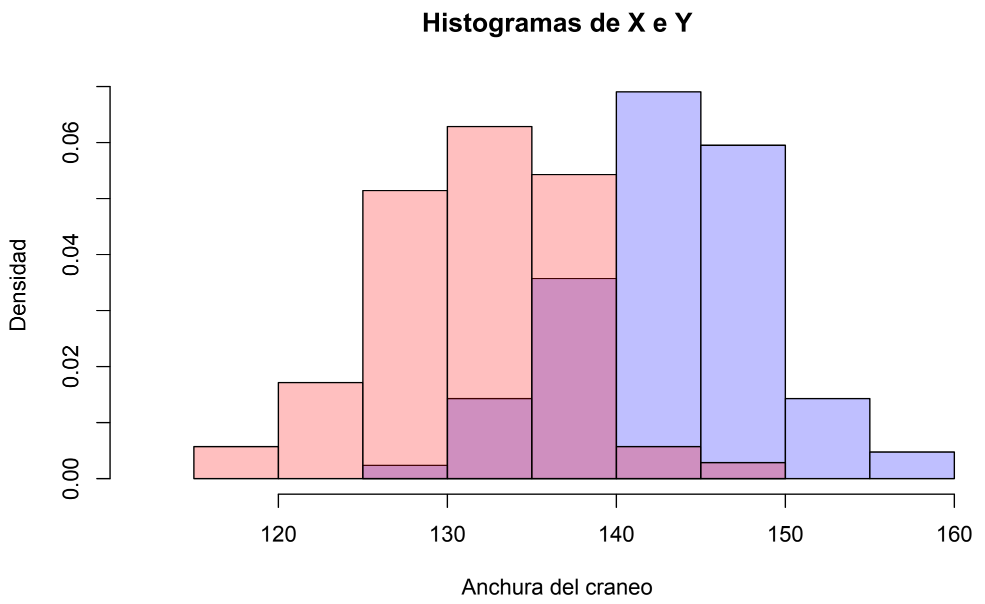
Ejemplo 1

Los datos comprenden mediciones de la anchura máxima de la cabeza (en cm) que se realizaron en 1959 para determinar si los etruscos eran italianos nativos.

Etruscos							Italianos					
141	147	126	140	141	150	142	133	124	129	139	144	140
148	148	140	146	149	132	137	138	132	125	132	137	130
132	144	144	142	148	142	134	130	132	136	130	140	137
138	150	142	137	135	142	144	138	125	131	132	136	134
154	149	141	148	148	143	146	134	139	132	128	135	130
142	145	140	154	152	153	147	127	127	127	139	126	148
150	149	145	137	143	149	140	128	133	129	135	139	135
146	158	135	139	144	146	142	138	136	132	133	131	138
155	143	147	143	141	149	140	136	121	116	128	133	135
158	141	146	140	143	138	137	131	131	134	130	138	138
150	144	141	131	147	142	152	126	125	125	130	133	
140	144	136	143	146	149	145	120	130	128	143	137	

La pregunta que se hacen los arqueólogos es si hay evidencia de una diferencia entre estos dos conjuntos de mediciones.

En lo que sigue, X se refiere a las medidas etruscas e Y se refiere a las medidas italianas. Hagamos un IdC al nivel 95 % para estimar la diferencia de medias $\mu_X - \mu_Y$. Siempre que uno quiere usar un test t, debe asegurarse que la distribución de los datos se puede aproximar por una distribución normal, al menos hacer un histograma y reconocer una forma acampanada.



Unos cálculos no muy agradables muestran que

$$n = 84,\ m = 70 \Rightarrow n + m - 2 = 152.$$

Además

$$\overline{X} = 143.77,\ S_X = 5.97,\ \overline{Y} = 132.44,\ S_Y = 5.75.$$

La diferencia de promedios es

$$\overline{X} - \overline{Y} = 11.33$$

y la varianza apareada es

$$S^2 = \frac{5239.5}{152} = 34.5, \qquad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 0.026.$$

Entonces

$$S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = 0.947.$$

El valor crítico $t_{152}(0.05/2) = 1.98$, de donde el IdC resulta ser

$$I_{95\,\%} = [11.33 \pm 1.98 \cdot 0.947] = [11.33 \pm 1.86] = [9.47, 13.19].$$

Como el intervalo no contiene al 0, podemos afirmar que las medias son diferentes. ■

Del mismo modo que pudimos pasar de un TdH a un IdC en la clase anterior, podemos recorrer el camino inverso y definir definir un TdH a partir de un IdC.

Por ejemplo, podemos realizar el TdH siguiente:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \\ H_A : \mu_X \neq \mu_Y. \end{cases}$$

Rechazamos H_0 si el intervalo de confianza I_α no contiene al 0, y no rechazamos H_0 en caso contrario.

En general, podemos testear

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y + \Delta \\ H_A : \mu_X \neq \mu_Y + \Delta \end{cases}$$

para cualquier Δ (al igual que hacíamos con los TdP). En este caso

$$\begin{cases} \text{Rechazamos } H_0 & \text{si } \Delta \notin I_\alpha; \\ \text{No rechazamos } H_0 & \text{si } \Delta \in I_\alpha. \end{cases}$$

Esto equivale a considerar la región de rechazo (a dos colas)

$$R_\alpha = \left[\left| \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right| \geq t_{n+m-2}(\alpha/2) \right].$$

El p-valor del test se calcula entonces como

$$\text{pval}\,(T_{\text{obs}}) = \mathbf{P}\left(|T| \geq |T_{\text{obs}}| \middle| H_0 \right)$$

en donde el estadístico es

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}.$$

Por ejemplo, en el estudio de los cráneos, si queremos testear $\Delta = 0$, el T_{obs} es

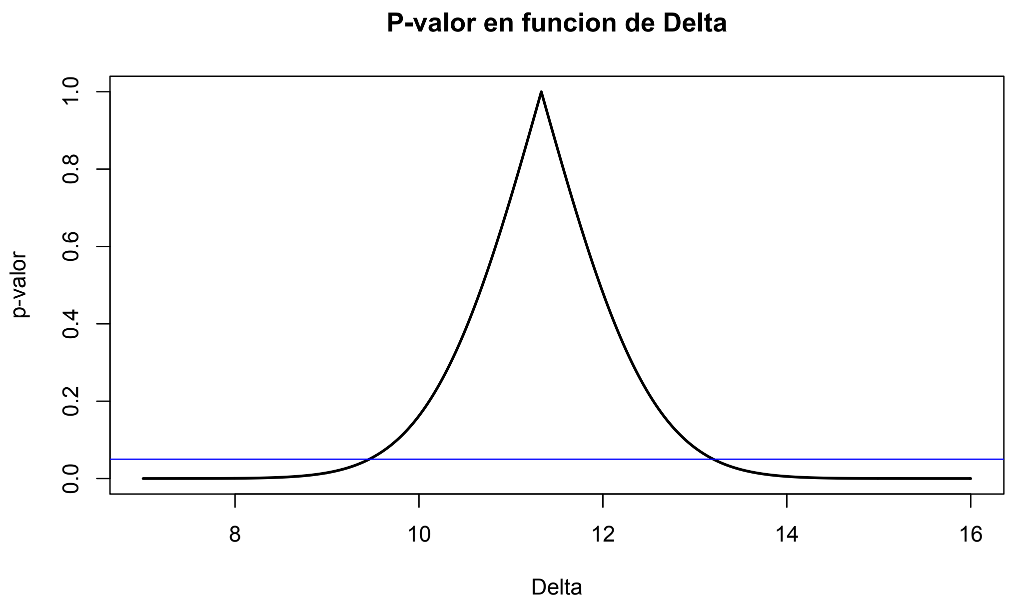
$$T_{\text{obs}} = \frac{11.33}{0.947} = 11.96$$

y por lo tanto el p-valor es

$$\text{pval}\,(11.96) \approx 10^{-23}.$$

No hay duda alguna en rechazar que las medias de los cráneos son iguales en los dos grupos.

Al igual que hicimos en los TdP, podemos graficar el p-valor en función de Δ, como se muestra en la figura de abajo. La linea horizontal pasa por la altura 0.05.



Comparación entre el TdP y el test t

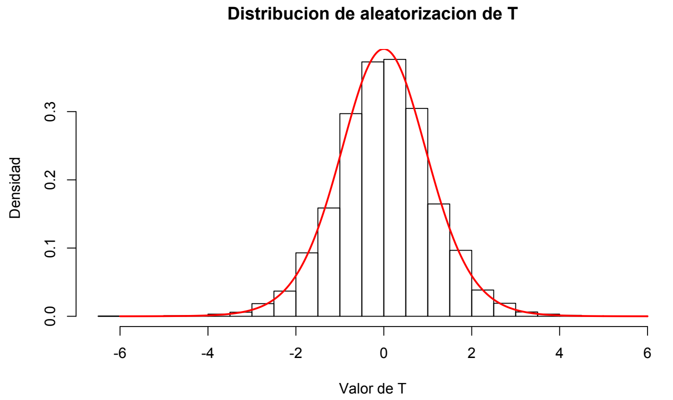
En ejemplo anterior, podríamos haber hecho un TdP en lugar de un test t. Veamos en un ejemplo la comparación entre los dos.

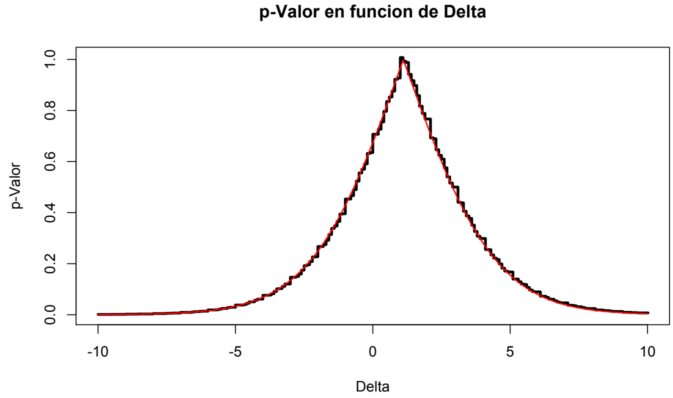
Tomemos uno de los ejemplos que apareció en uno de los ejercicios de práctico. Un granjero está interesado en comparar dos tipos diferentes de gallinero para sus gallinas ponedoras. Para esto, divide al azar un grupo de 16 gallinas en dos grupos, uno de 7 y otro de 9, unas van al gallinero A y las otras al gallinero B. Luego registra la cantidad diaria de huevos:

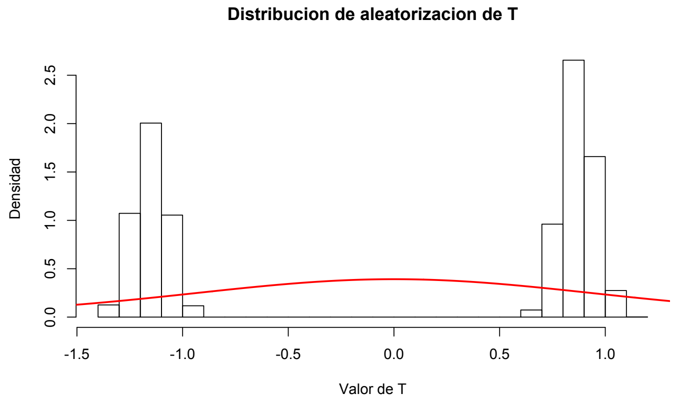
Gallinero A:	41	36	30	33	44	35	32	37	28
Gallinero B:	34	29	27	38	31	39	40		

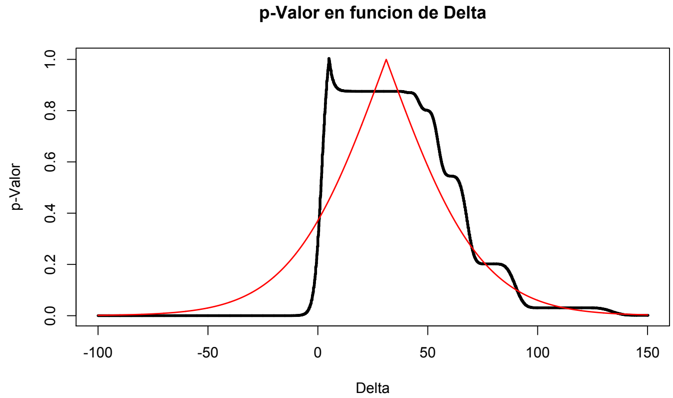
El granjero no tiene conocimientos previos sobre qué gallinero es mejor, así que haremos un test a dos colas.

Los dos primeros gráficos de la figura de abajo muestran la distribución de aleatorización del estadístico T (el histograma) y en rojo la densidad de la distribución t de Student con $n+m-2$ grados de libertad. Notar que la aproximación t es muy buena.


Distribucion de aleatorizacion de T
Densidad
Valor de T


p-Valor en funcion de Delta
p-Valor
Delta


Distribucion de aleatorizacion de T
Densidad
Valor de T


p-Valor en funcion de Delta
p-Valor
Delta

Sin embargo, el test t tiene sus límites. Para poder usarlo precisamos verificar con cuidado que sus supuestos se cumplen. Uno de ellos es que las varianzas de ambos grupos sean iguales. Supongamos que la persona que ingresa los datos de las gallinas comete un error de tipeo y el 30 del grupo A lo ingresa como 300. Esto crea así un dato atípico en el grupo A, lo cual aumenta bastante su varianza.

Notar (ver los últimos dos gráficos de la figura de arriba) que ahora la distribución de aleatorización poco tiene que ver con la t de Student. La creación de ese dato atípico tiene como efecto que la distribución de aleatorización del estadístico es bi-modal. En este caso no podríamos usar el test t para analizar los datos.

2. Comparación de dos muestras apareadas

En la sección anterior obtuvimos IdC para la diferencia entre medias, donde se toman dos muestras aleatorias independientes de dos poblaciones de interés. Esto es, se toma una muestra de n observaciones de la primera población, y una muestra aleatoria completamente independiente de m observaciones de la segunda población. En muchas situaciones experimentales, existen sólo n unidades experimentales diferentes y los datos están recopilados por pares; esto es, cada unidad experimental está formada por dos observaciones.

Por ejemplo, en un estudio de 1962 se les pidió a 14 sujetos que estacionaran dos automóviles sustancialmente distintos en cuanto a tamaño de la llanta y la relación de vueltas del volante. Para cada automóvil y para cada sujeto se midió el tiempo, en segundos, necesario para realizar la maniobra; los datos se muestran en la tabla de abajo.

	Automóvil		Diferencia
Individuo	X	Y	D
1	37.0	17.8	19.2
2	25.8	20.2	5.6
3	16.2	16.8	-0.6
4	24.2	41.4	-17.2
5	22.0	21.4	0.6
6	33.4	38.4	-5.0
7	23.8	16.8	7.0
8	58.2	32.2	26.0
9	33.6	27.8	5.8
10	24.4	23.2	1.2
11	23.4	29.6	-6.2
12	21.2	20.6	0.6
13	36.2	32.2	4.0
14	29.8	53.8	-24.0

Notar que cada sujeto es la "unidad experimental" mencionada anteriormente. Deseamos obtener un IdC para la diferencia entre el tiempo promedio para estacionar los dos automóviles.

En general, el modelo es el siguiente. Suponemos que los datos son pares

$$(X_i, Y_i) \quad i = 1, \dots, n$$

que forman un muestreo aleatorio del par (X, Y). Supondremos X e Y tienen media μ_X y μ_Y respectivamente, que la diferencia $D = X - Y$ tiene distribución normal, con media μ_D

y varianza σ_D^2. Entonces podemos pensar a las diferencias

$$D_i = X_i - Y_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

como un muestreo aleatorio de D. Es decir, las mediciones para unidades experimentales diferentes son independientes, pero no tienen porque serlo dentro de un mismo par (i.e. X e Y pueden no ser independientes).

La variable D es normal con

$$\mu_D = \mu_X - \mu_Y, \quad \sigma_D^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\mathrm{cov}(X,Y).$$

En particular, aunque las varianzas de X e Y sean conocidas, no lo será la varianza de D, a menos que se conozca la covarianza entre X e Y.

Así que usaremos el estadístico t para construir el IdC. Llamemos S_D a la varianza muestral de D.

Notar que es de esperar que la varianza de D sea menor a $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ dado que al corresponder las mediciones a una sola unidad experimental, la covarianza será positiva. Por ejemplo, es probable que las diferentes personas presenten gran variabilidad en los tiempos de estacionamientos, pero esperamos observar una menor variabilidad entre los tiempos de estacionamiento de una misma persona.

El estadístico

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{D} - \mu_D)}{S_D}$$

tiene distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. Entonces

$$\mathbf{P}\left(\left|\overline{D} - \mu_D\right| \leq t \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow t = t_{n-1}(\alpha/2).$$

Un IdC (exacto) al nivel $1-\alpha$ para $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$ es

$$I_\alpha = \left[\overline{D} \pm t_{n-1}(\alpha/2) \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right].$$

Calculemos el intervalo al nivel 90 % para el ejemplo de los automóviles. En este caso $\overline{D} = 1.21$ y $S_D = 12.68$. El valor critico de la distribución t correspondiente es $t_{13}(0.05) = 1.77$, por lo que IdC para μ_D al nivel 90$ es entonces

$$I_{90\%} = [-4.79, 7.21].$$

Observar que el intervalo de confianza para μ_D incluye al cero. Esto implica que, al nivel de confianza del 90 %, los datos no apoyan la afirmación de que los dos automóviles tienen diferentes tiempos de estacionamiento medios μ_X y μ_Y. Es decir, el valor $\mu_D = \mu_X - \mu_Y = 0$ no es inconsistente con los datos observados.

Al igual que hicimos en la sección anterior, podemos transformar este IdC en un TdH para μ_D. Por ejemplo, podemos realizar el TdH siguiente:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = 0 \\ H_A : \mu_D \neq 0. \end{cases}$$

Rechazamos H_0 si el intervalo de confianza I_α no contiene al 0, y no rechazamos H_0 en caso contrario.

En general, podemos testear

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = \Delta \\ H_A : \mu_D \neq \Delta \end{cases}$$

para cualquier Δ. En este caso

$$\begin{cases} \text{Rechazamos } H_0 & \text{si } \Delta \notin I_\alpha; \\ \text{No rechazamos } H_0 & \text{si } \Delta \in I_\alpha. \end{cases}$$

Esto equivale a considerar la región de rechazo (a dos colas)

$$R_\alpha = \left[\left| \frac{\overline{D} - \Delta}{S_n/\sqrt{n}} \right| \geq t_{n-1}(\alpha/2) \right].$$

El p-valor del test se calcula entonces como

$$\text{pval}\,(T_{\text{obs}}) = \mathbf{P}\left(|T| \geq |T_{\text{obs}}| \middle| H_0 \right)$$

en donde el estadístico es

$$T = \frac{\overline{D} - \Delta}{S_D/\sqrt{n}}.$$

Por ejemplo, en el estudio de los automóviles, si queremos testear $\Delta = 0$, el T_{obs} es

$$T_{\text{obs}} = \frac{1.21}{12.68/\sqrt{14}} = 0.357$$

y por lo tanto el p-valor es

$$\text{pval}\,(0.357) = 0.7268.$$

Como es un p-valor muy grande, no hay evidencia para rechazar H_0.

3. Prueba para la ausencia de correlación ($\rho = 0$)

Si suponemos que el par (X,Y) tiene distribución normal bi-variada, podemos hacer un TdH sobre la independencia de X e Y. Recordar que en el caso normal la independencia es equivalente a la ausencia de correlación.

Como vimos en la clase de estadística descriptiva de dos variables, cuando existe una relación entre X e Y, parte de la variación de Y se explica por el hecho de que cuando X cambia, arrastra consigo a Y. ¿Cuánto influye esto en la variación total de Y?

Observar que la media de las predicciones de regresión $\text{reg}(X_i)$ coincide con la de Y:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \text{reg}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r \frac{S_Y}{S_X} \left(X_i - \overline{X} \right) + \overline{Y} = \overline{Y}.$$

La *variación explicada* por la regresión es por definición

$$S_{\text{reg}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\text{reg}(X_i) - \overline{Y} \right)^2.$$

Podemos descomponer la variación total de Y como $S_Y^2 = \mathrm{ECM}^2 + S_{\mathrm{reg}}^2$. La prueba es una cuenta: primero observar que

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mathrm{reg}(X_i)) \left(\mathrm{reg}(X_i) - \overline{Y}\right) = 0$$

De aquí resulta

$$\begin{aligned} S_Y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \mathrm{reg}(X_i) + \mathrm{reg}(X_i) - \overline{Y}\right)^2 \\ &= \mathrm{ECM}^2 + \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mathrm{reg}(X_i)) \left(\mathrm{reg}(X_i) - \overline{Y}\right) + s_{\mathrm{reg}}^2 = \mathrm{ECM}^2 + S_{\mathrm{reg}}^2. \end{aligned}$$

La fórmula anterior se interpreta así:

$$\overbrace{S_Y^2}^{\substack{\text{Variación} \\ \text{total de } Y}} = \overbrace{ECM^2}^{\substack{\text{Variación} \\ \text{residual}}} + \overbrace{S_{\mathrm{reg}}^2}^{\substack{\text{Variación} \\ \text{de regresión}}}$$

Pero recordando que $ECM^2 = S_Y^2(1-r^2)$, podemos re-escribir la relación anterior como

$$\overbrace{S_Y^2}^{\substack{\text{Variación} \\ \text{total de } Y}} = \overbrace{S_Y^2(1-r^2)}^{\substack{\text{Variación} \\ \text{residual}}} + \overbrace{S_Y^2 r^2}^{\substack{\text{Variación} \\ \text{de regresión}}}$$

Es por esto que podemos interpretar el cociente

$$\frac{r^2}{1-r^2} = \frac{\text{Variación de regresión}}{\text{Variación residual}}$$

como una comparación de dos varianzas.

Vamos a hallar la distribución de $r/\sqrt{1-r^2}$ bajo el supuesto de que $\rho = 0$. Para esto haremos un argumento geométrico basado en la simetría rotacional. Supongamos que X e Y son normales estándar. Si $\rho = 0$ entonces además son independientes, y los mismo ocurre con la muestra (X_i, Y_i) para $i = 1, \ldots, n$.

Denotemos por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Consideremos el vector unitario

$$u = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} e_i = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1).$$

Las proyecciones de X e Y sobre u son

$$X_u = (X \cdot u)u = \overline{X}u, \quad Y_u = (Y \cdot u)u = \overline{Y}u$$

respectivamente, en donde hemos denotado (con un poco de abuso de notación)

$$X = (X_1, \ldots, X_n), \quad Y = (Y_1, \ldots, Y_n).$$

Sea V el complemento ortogonal de u. Entonces las proyecciones de X e Y sobre V son

$$X_V = X - X_u, \quad Y_V = Y - Y_u.$$

Por la invarianza rotacional, sabemos que X_V e Y_V son independientes y tienen la misma distribución conjunta que $n-1$ variables normales estándar independientes.

Notar que las normas de X_Y e Y_V son

$$\|X_V\|^2 = (n-1)S_X^2, \quad \|Y_V\|^2 = (n-1)S_Y^2.$$

Más aún, el producto escalar entre X_V e Y_V es

$$X_V \cdot Y_V = \sum_{i=1} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = (n-1) r S_X S_Y.$$

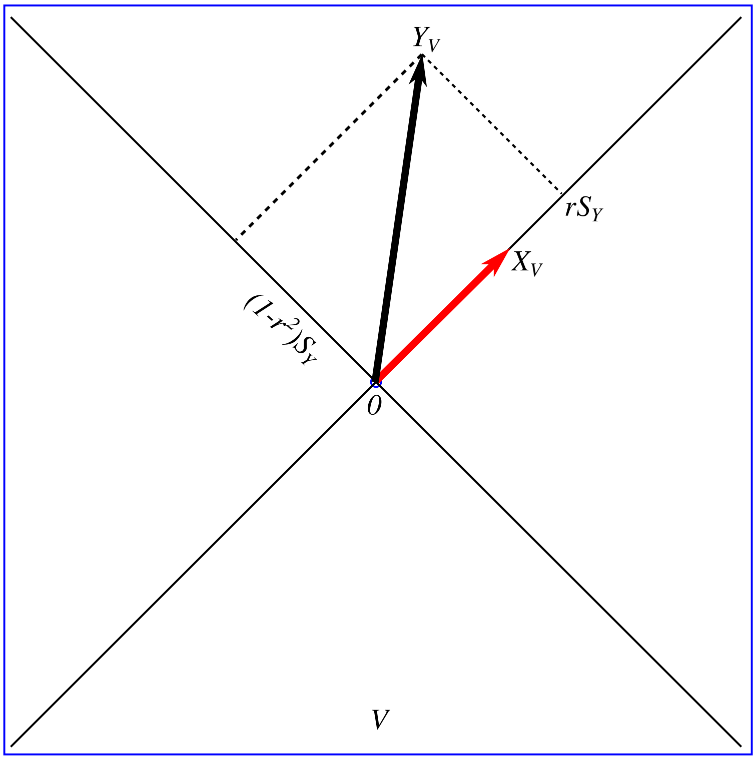
Entonces, la proyección de Y_V sobre X_V es

$$Y_{V,X} = \frac{(Y_V \cdot X_V)}{\|X_V\|^2} X_V = \frac{(n-1) r S_X S_Y}{(n-1)S_X^2} X_V = (r S_Y) \frac{X_V}{S_X}.$$

La norma de esta proyección es precisamente

$$\|Y_{V,X}\|^2 = r^2 S_Y^2 = \text{Variación de regresión.}$$

La proyección sobre el complemento ortogonal de X_V tiene norma $(1-r^2)S_Y^2$ la variación residual.



Por la simetría rotacional, proyectar sobre X_V es como proyectar sobre cualquier dirección fija. Notar que V tiene dimensión $n-1$, por lo que la distribución de $(1-r^2)S_Y^2$ es χ^2 con $n-2$ grados de libertad. La distribución de rS_Y es normal estándar, y es independiente de $\sqrt{1-r^2}S_Y$. Luego la distribución del cociente

$$\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{rS_Y}{\sqrt{(1-r^2)S_Y^2/(n-2)}}$$

es t de Student con $n-2$ grados de libertad.

El caso general en el que las medias y las varianzas de X e Y son arbitrarias se deduce de este por linealidad.

Sea (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$, un muestreo i.i.d. de (X, Y) con distribución normal bivariada. Sea r el coeficiente de correlación muestral. Si $\rho = 0$, entonces

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

tiene distribución t de Student con $n-2$ grados de libertad.

Esto nos permite plantear el siguiente TdH para ρ:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_A : \rho \neq 0 \end{cases}$$

La región de rechazo es claramente

$$R_\alpha = \left\{ \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \geq t_{n-2}(\alpha/2) \right\}.$$

Veamos un ejemplo.

En un estudio se desea estudiar si existe una relación entre la presión sistólica y la edad. Para esto se estudian 6 individuos, y se obtienen los siguientes resultados:

Individuo	Edad, X	Presión, Y
A	43	128
B	48	120
C	56	135
D	61	143
E	67	141
F	70	152

De aquí calculamos $r = 0.897$. El valor crítico $t_{n-2}(\alpha/2)$ para $n = 6$ y $\alpha = 0.1$ lo sacamos de la tabla y es 2.13. El valor de T observado en el estudio es

$$T_{\text{obs}} = \frac{0.897\sqrt{4}}{\sqrt{1-0.897^2}} = 4.06.$$

Como $T_{\text{obs}} \geq 2.13$, rechazamos la hipótesis $\rho = 0$.

También podemos calcular el p-valor

$$\text{pval}(4.06) = \mathbf{P}(|T| \geq 4.06 | H_0) = 0.0153$$

que es bastante pequeño. Podemos estar bastante seguros de que existe una asociación entre la edad y la presión.