Clase 1: Casos favorables sobre casos posibles

Matías Carrasco

29 de junio de 2019

Índice

Resumen En esta clase comenzamos estudiando el modelo clásico de probabilidades, típicamente utilizado para modelar juegos de azar. Discutiremos brevemente la interpretación, y haremos un repaso rápido sobre las operaciones básicas de conjuntos. Concluimos con el repaso de las reglas de conteo, arreglos, permutaciones y combinaciones.

¿Se puede medir la probabilidad?

Seguramente si te pidieran definir lo que es una probabilidad, dirías

$$\text{probabilidad} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} \tag{1}$$

Por ejemplo, si lanzamos una moneda de \$2 la probabilidad de que salga carpincho es $1/2$, pues se trata de un caso favorable en dos posibles; si lanzamos un dado la probabilidad de que salga un seis es $1/6$, pues solo nos sirve una de seis posibilidades.

Figura 1: La probabilidad de sacar carpincho en el lanzamiento de una moneda de \$2 es $1/2$

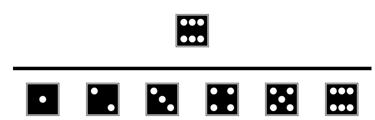


Figura 2: La probabilidad de sacar un seis en el lanzamiento de un dado es $1/6$

La pregunta es un poco tramposa, y de hecho la respuesta es más bien una forma de medir la probabilidad que una definición. Esta es la primera idea importante a retener, el simple hecho de que una probabilidad puede medirse. ¿Cómo se mide algo? Pensemos en la longitud. Buscamos un estándar (como el metro), lo aplicamos repetidamente y luego contamos. Lo mismo ocurre con la suerte, para medir una probabilidad primero buscamos casos de igual probabilidad y luego contamos.[1]

La definición (1) está basada en el principio de indiferencia: si no hay razones por las cuales sospechar que un resultado particular tiene más chances de ocurrir que los demás, entonces todos los resultados deben tener la misma probabilidad. Cuando asignamos la probabilidad 1/2 de que salga cara en el lanzamiento de una moneda, esto significa que nuestras razones para pensar que saldrá cara son idénticas a las que nos hacen pensar que saldrá cruz. Lo mismo para un dado, siempre y cuando éste sea perfectamente simétrico.[2]

Ejemplos típicos en los que la definición (1) aplica abundan entre los juegos de azar, juegos de cartas, y juegos de apuestas como las loterías y casinos.

Ejemplo 1 Una moneda es *justa* si sale cara o cruz con igual probabilidad. Consideremos el siguiente juego simple: se tira una moneda justa tres veces, y ganas si exactamente uno de los lanzamientos resulta cara. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

[1] Para leer más sobre la analogía entre medir y calcular una probabilidad, consultar el libro de Diaconis y Skyrms *Ten Great Ideas about Chance*, 2017.

[2] Pueden consultar A. Rayo, *¿Qué es la probabilidad?*, Investigación y Ciencia, Junio 2011, Nº 417, por una discusión amena sobre este principio.

Con tres lanzamientos, podemos enumerar fácilmente los 8 casos posibles[3]

$$XXX, XXC, XCX, XCC, CXX, CXC, CCX, CCC.$$

Tres de estos casos tienen exactamente una cara XXC, XCX, CXX. Como todas las posibilidades son igualmente probables, tenemos

$$P\,(1 \text{ cara en } 3 \text{ lanzamientos}) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{3}{8}.$$

[3] *Para pensar*: ¿Sería práctico enumerar los casos posibles con 10 lanzamientos?

Vamos a mantener un estilo bastante informal, al menos en esta clase, pero es importante subrayar que cuando decimos probabilidad, nos referimos a la probabilidad de un cierto *evento*. En general, denotaremos los eventos con letras mayusculas, como A, B, etc., y la probabilidad de un evento por $P\,(A)$, $P\,(B)$, etc. En el ejemplo de la moneda, el evento $A =$ “el resultado es cara” tiene probabilidad $P\,(A) = 1/2$. [4] El conjunto de todos los resultados posibles lo denotaremos Ω (la letra griega omega mayúscula) y le daremos el pomposo nombre de *espacio muestral*. Si lo pensamos como un evento, es simplemente el evento “algo ocurre”, y claramente $P\,(\Omega) = 1$.

[4] *¿Cómo se expresan las probabilidades?*: Las probabilidades se pueden expresar de tres formas distintas:

- números decimales, por ejemplo 0.5.
- fracciones, por ejemplo 1/2.
- porcentajes, por ejemplo 50 %.

Cualquiera de ellas es válida. En este curso usaremos como máximo cuatro cifras decimales para expresar probabilidades. Esto equivale a dos cifras decimales para los porcentajes.

Ejemplo 2 Un mazo de poker consiste de 52 cartas, divididas en 4 palos, corazones (♡), diamantes (♢), piques (♠), y tréboles (♣). Cada palo contiene 13 cartas con valores 2, 3, ..., 10, J, Q, K, A:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	A
♡	2♡	3♡	4♡	5♡	6♡	7♡	8♡	9♡	10♡	J♡	Q♡	K♡	A♡
♢	2♢	3♢	4♢	5♢	6♢	7♢	8♢	9♢	10♢	J♢	Q♢	K♢	A♢
♠	2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠	A♠
♣	2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣	A♣

Una mano de poker consiste de 5 cartas. Un par consiste de dos cartas con el mismo valor, y las tres restantes de valores diferentes (al valor del par y entre ellas, por ejemplo 2♡, 2♠, 5♡, 8♣, K♢).

Probá tu intuición: la probabilidad de obtener un par en una mano es

A menor a 5 %

B entre 5 % y 10 %

C entre 10 % y 20 %

D entre 20 % y 40 %

E entre 40 % y 50 %

F mayor a 50 %

Por el momento solo podemos intuir la respuesta. Uno de nuestros objetivos es aprender a calcularla exactamente. Para empezar, como cada mano de 5 cartas es igualmente probable, podemos calcular la probabilidad de un par usando

$$P\,(\text{un par}) = \frac{\text{número de manos con un par}}{\text{número total de manos}}.$$

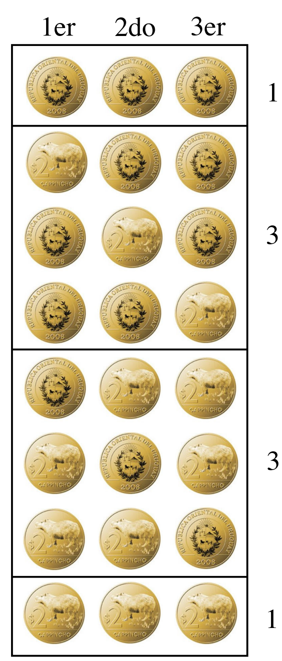


Figura 3: Diferentes resultados posibles de lanzar una moneda 3 veces. Las columnas representan cada lanzamiento, las filas los resultados posibles. Las monedas están agrupadas según la cantidad de carpinchos. La cantidad de carpinchos está indicada a la derecha.

Es decir, para calcular la probabilidad exacta, debemos contar cuántas posibilidades hay en cada uno de estos eventos. Y debemos ser astutos, pues hay demasiados elementos en ellos como para enumerarlos en una lista. Así que volveremos a este problema cuando hayamos aprendido algunas técnicas de conteo. Pero es importante entender aquí los siguientes conceptos:

- ¿Cuál es el espacio muestral Ω?

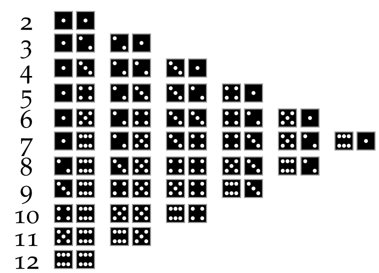
  El espacio muestral consiste de todas las manos posibles de 5 cartas.

- ¿Cuál es la probabilidad de cada mano?

  La probabilidad de cada mano es 1 sobre la cantidad de manos posibles (i.e. la cantidad de elementos en Ω).

Para pensar: Se debe tener cierto cuidado, pues este principio no se aplica en todas las situaciones. ¿Se te ocurre algún ejemplo de casos no equiprobables?

Suma de dos dados



Un escenario posible es el siguiente: si lanzamos dos dados y miramos la suma de los resultados, podríamos decir que los casos posibles son los números del 2 al 12, pero parece menos probable que salga un 2 a que salga un 7. En este caso sería mejor aplicar el principio a los pares de números que representan los resultados de cada dado. Este tipo de ejemplos es típico, los resultados posibles que nos interesan no son equiprobables, pero se pueden formular a partir de otros que sí lo son.

Para resumir: casos equiprobables

Por el momento usaremos el siguiente principio para calcular probabilidades: si en un procedimiento hay n resultados posibles, éstos son igualmente probables (equiprobables), y un evento puede ocurrir de k formas posibles, la probabilidad del evento es entonces k/n.

De este principio se deducen inmediatamente tres reglas sagradas que deben cumplir las probabilidades. La primera es obvia, y es que toda probabilidad es positiva. La segunda ya la dijimos, y es que la probabilidad de Ω es 1. Y la tercera, es que si dos eventos no tienen casos favorables en común, entonces la probabilidad de que ocurra uno u otro es la suma de las probabilidades de cada uno. Esto es así pues ningún caso favorable será contado dos veces al sumar los casos por separado. Eventos sin casos favorables en común se llaman *incompatibles* o *disjuntos*.

Reglas básicas

1. $P(A) \geq 0$ para cualquier evento A.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$ si A y B son incompatibles.

Estas son las reglas de juego. También se deducen otras reglas, por ejemplo: 1) la probabilidad de cualquier evento es siempre un número entre 0 y 1; y 2) la probabilidad de que un evento no ocurra es 1 menos la probabilidad de que sí ocurra.[5] En símbolos:

- $0 \leq P(A) \leq 1$ para cualquier evento A.

[5] *Uno menos:* El truco de hacer uno menos es maravilloso. Por ejemplo: se lanza 5 veces una moneda justa, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los lanzamientos sea cara? Uno menos la probabilidad de que en ninguno salga cara, es decir que todos sean cruces. Esto es $1 - (1/2^5)$.

- $P(\text{no } A) = 1 - P(A)$.

Sin embargo, estas reglas no son básicas en el sentido de que se pueden deducir de la reglas 1, 2 y 3.[6] Se pueden deducir muchas reglas más, pero las que tenemos serán más que suficientes por ahora.

[6] ¿Se te ocurre cómo probarlo?

Existe una definición general de probabilidad que contiene a la definición (1) como caso particular. Sin embargo, la ecuación (1) aparece con mucha frecuencia y es muy útil en una gran variedad de situaciones. Aunque no es toda la historia, vale la pena pasar un poco de tiempo con ella, ganar intuición sobre algunas propiedades básicas del azar, y de paso prepararnos para entender mejor la definición general.

¿Cómo interpretamos las probabilidades?

Pensemos en el lanzamiento de un dado. Si el dado es perfectamente simétrico, las caras del dado tienen todas la misma probabilidad de ocurrir, esto es $1/6$ que en porcentajes es aproximadamente $16.67\,\%$. Pero ¿cómo interpretamos está probabilidad? La interpretación es: si se lanza un dado una y otra vez, repitiendo el proceso aleatorio básico en las mismas condiciones, a la larga saldrá un seis aproximadamente $16.67\,\%$ del tiempo.

Interpretación de la probabilidad

> La probabilidad de un evento da el porcentaje de tiempo que se espera que ocurra, cuando el proceso básico se realiza una y otra vez, de forma independiente y en las mismas condiciones.

Ejemplo 3 — En la cafetería. La cafetería estudiantil de una universidad tiene pequeñas mesas cuadradas de cuatro sillas[7]. Algunos estudiantes vienen a la cafetería fuera del horario de almuerzo para conversar o estudiar. Un psicólogo interesado en cómo las personas ocupan el espacio observó a los estudiantes por un período de varios meses. Los resultados de su observación están en la Tabla 1.

[7] Este ejemplo aparece originalmente en el artículo *Turning the tables* de J. E. Cohen, de la colección editada por F. Mosteller, *Statistics by Example, Exploring Data* (1973).

	Número de pares observados	
	Adyacentes	*Opuestos*
Interactúan	135	63
No interactúan	2	16

Tabla 1: La tabla muestra los resultados de las observaciones de pares de estudiantes sentados en la misma mesa. Se distinguen los pares sentados en lados opuestos de la mesa (frente a frente) y pares sentados en lados adyacentes. También se distinguen los pares de estudiantes que estaban interactuando de aquellos que no lo hacían.

El psicólogo dedujo que los pares que interactúan tienen una marcada preferencia de sentarse en la esquina de la mesa, y que seguramente esto es porque de esta forma están más cerca el uno del otro, y evitando además el incómodo contacto visual. También, concluyó que los pares que no interacúan muestran una disposición muy diferente de aquellos que interacúan.

¿Estás de acuerdo con el psicólogo? ¿De verdad los datos del psicólogo muestran que las personas prefieren sentarse en la esquina de las mesas cuadradas pequeñas si están interactuando?

Consideremos los pares que interactúan. Se trata de discernir si los estudiantes tienen o no una preferencia de cómo sentarse en la mesa. Obviamente muchos más pares eligieron lados adyacentes que lados opuestos. Pero antes de creer que esto demuestra que los estudiantes prefieren sentarse en lados adyacentes, necesitamos saber qué esperar si los estudiantes no muestran preferencia alguna sobre cómo sentarse.

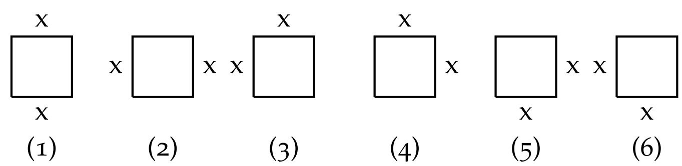


Figura 4: Los posibles arreglos de dos estudiantes sentados en una mesa cuadrada.

Los posibles arreglos de dos estudiantes (x) en una mesa cuadrada se muestran en la Figura 4. Los arreglos 1 y 2 corresponden a lados opuestos, mientras que los $3, 4, 5$ y 6 a lados adyacentes. En total 198 pares de estudiantes fueron observados por el psicólogo. Cada par puede sentarse entonces de una de las seis maneras que se muestran en la figura.

Supongamos que los estudiantes eligen al azar dónde sentarse. De ser así, al llegar a la mesa eligirán con probabilidad $1/6$ una de los seis arreglos posibles. ¿Cuál es la probabilidad de que se sienten en lados adyacentes? Cómo son cuatro (de las seis) las formas posibles, esta probabilidad es $4/6 = 2/3$. Aquí hemos usado el principio de indiferencia, pues si los estudiantes realmente se están sentando al azar, no debería haber ninguna preferencia por una disposición particular.

Otra forma de obtener el mismo resultado es suponer que el primer estudiante del par elige cualquier asiento. Para el segundo estudiante, los dos asientos a la derecha o a la izquierda del primero son adyacentes; solo un asiento es opuesto. Si el segundo estudiante no tiene preferencia, la probabilidad de sentarse en un lado adyacente a su compañero es 2/3.

La probabilidad de sentarse en lados adyacentes es entonces $2/3$, y la de sentarse en lados opuestos $1/3$. Si 198 pares se sientan de acuerdo a estas probabilidades, es razonable esperar que el total de pares que se sienten en lados adyacentes sea cercana a

$$198 \times \frac{2}{3} = 132.$$

Esto muestra que los números obtenidos por el psicólogo están en perfecto acuerdo con lo que se esperaría observar si los estudiantes se sientan al azar. Los datos observados están tan cerca de estas expectativas que no respaldan la conclusión de que los estudiantes que interactúan prefieren sentarse en las esquinas.

Aunque las proporciones en los datos coinciden con las predichas por el supuesto de que los estudiantes se sienta de forma aleatoria, no hemos probado la aleatoriedad. Algunas parejas pueden preferir, o tienen la costumbre de, sentarse de una manera, y algunas de otras. Simplemente vimos que los datos son perfectamente compatibles con ese supuesto.

Mesas contra la pared: Supongamos que las mesas cuadradas están dispuestas con un lado hacia la pared. ¿Cuántos arreglos distintos de formas diferentes de sentarse son posibles para un par de estudiantes? ¿Cuántos de éstos arreglos son adyacentes y cuántos son opuestos? ¿Cambiaría esta dispocisión nuestras conclusiones sobre las observaciones del psicólogo?

Notar que en el caso de los pares que no interactúan, el mismo razonamiento nos dice que deberíamos esperar

$$18 \times \frac{2}{3} = 12$$

pares sentados en lados adyacentes. Ésto contrasta fuertemente con lo observado por el psicólogo. En este caso, sí podríamos decir que no se están sentando al azar. Probablemente sea seguro concluir que las personas que evitan interactuar prefieren no sentarse en una esquina el uno con el otro. ■

El glosario probabilístico

Vamos a definir la terminología estándar para trabajar con eventos en la teoría de probabilidades. Las operaciones usuales de *no*, *y* y *o*, que ya conocemos y manejamos perfectamente, las llamaremos con nombres raros y las denotaremos de forma complicada. Así es que diremos "complemento" en lugar de *no*, "intersección" en lugar de *y*, y "unión" en lugar de *o*.

Glosario

Término	**Símbolo**
Experimento	
Espacio muestral	Ω
Evento	A
Cardinal	$\|A\|$
Probabilidad	$P(A)$
Complemento	A^c
Intersección	$A \cap B$
Unión	$A \cup B$
Inclusión	$A \subset B$
Diferencia	$A \setminus B$

- *Experimento*: cualquier acto en el cual el resultado exacto no se puede predecir con certeza. Todos los ejemplos que vimos, la moneda, las cartas, los dados, etc., son experimentos en este sentido.
- *Espacio muestral*: es el conjunto Ω de todos los resultados posibles de un experimento. Los elementos del espacio muestral se denotan usualmente por la letra griega ω (omega minúscula) y se llaman eventos simples o elementales.
- *Evento*: es una subcolección de resultados posibles de un experimento (un evento A es un subconjunto del espacio muestral Ω).[8]

  Si el resultado observado es un cierto ω perteneciente a un evento A (esto lo escribimos $\omega \in A$), decimos entonces que A ha ocurrido.
- *Cardinal*: es el número de elementos de un evento, lo escribimos $|A|$. Con esta notación la probabilidad de un evento A es

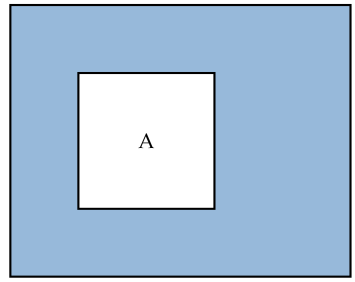
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \tag{2}$$

[8] Hay dos eventos particularmente sencillos: el evento imposible $A = \emptyset$ que significa que nada ocurre, y el evento seguro $A = \Omega$ que significa que algo ocurre. La letra $\emptyset$ representa al conjunto vacío, esto es, un conjunto que no tiene elementos. Pensar en una bolsa vacía.

- *Complemento*: consiste en todos los eventos simples que no pertenecen a A. Este evento lo denotaremos por

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}.$$

  Es lo mismo decir que A no ha ocurrido a decir que A^c ha ocurrido.



Complemento

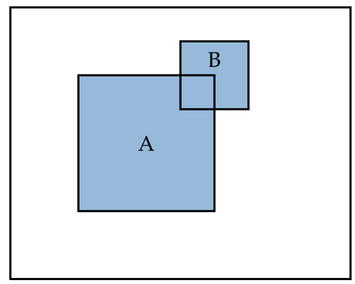
- *Intersección*: expresa la condición de que ambos A y B ocurran simultáneamente. Este evento se escribe

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y } \omega \in B\}.$$

  Cuando dos eventos no tienen elementos en común, decimos que son incompatibles o disjuntos y escribimos $A \cap B = \emptyset$. En palabras, ésto quiere decir que si A ocurre, B no puede ocurrir, y viceversa.

- *Unión*: expresa la condición de que A o B ocurran. Se entiende la conjunción *o* en el sentido amplio, una cosa o la otra o ambas. Este evento se escribe

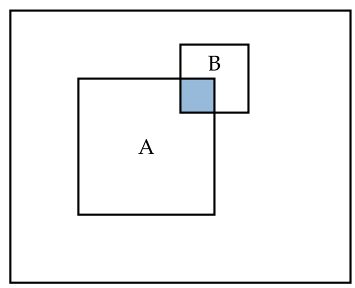
$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ o } \omega \in B\}.$$



Unión

- *Inclusión*: expresa la condición de que A implica B. Esto lo escribimos $A \subset B$.

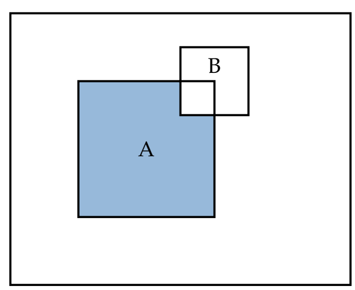
- *Diferencia*: expresa la condición A pero no B. Se escribe $A \setminus B$.



Intersección

Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn ofrecen una manera sencilla de visualizar las operaciones con conjuntos. En las figuras al margen representamos las operaciones básicas con conjuntos mediante diagramas de Venn. En todas ellas las regiones en color representan al conjunto en cuestión.

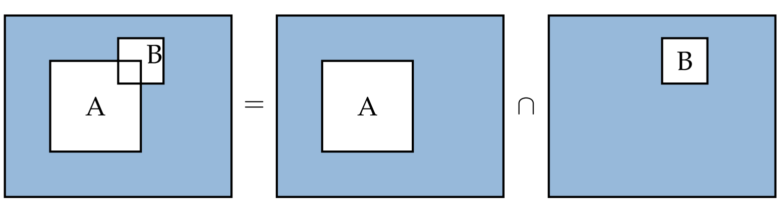


Diferencia

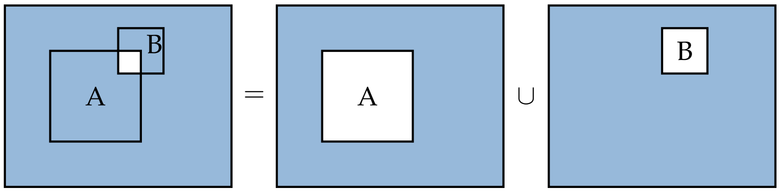
Leyes de De Morgan

Las leyes de De Morgan son dos reglas útiles que permiten pasar de uniones a intersecciones tomando complementos.

- *Complemento de la unión*. El complemento de la unión de A y B es la intersección de sus complementos: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.



- *Complemento de la intersección*. El complemento de la intersección de A y B es la unión de sus complementos: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.



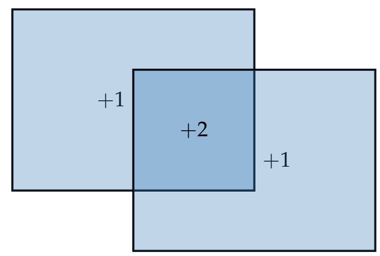
Reglas de conteo

Contar posibilidades puede ser en la práctica bastante difícil. En general no es posible enumerarlas todas, y aunque lo fuera, no sería deseable. ¿Cómo podemos contar posibilidades de forma sistemática?

Principio de inclusión-exclusión

La primera y más simple de estas reglas es el principio de inclusión-exclusión. Éste afirma que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Es inmediato ver que si sumamos el cardinal de A y el de B, estaremos contando dos veces aquellos elementos que pertenezcan a ambos. Por eso restamos el cardinal de la intersección.

Este principio es válido en general, con cualquier cantidad finita de eventos, pero su enunciado es un poco engorroso. Es mejor entender cómo funciona en un ejemplo.

Ejemplo 4 Se lanza una moneda justa 4 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos una secuencia de dos caras consecutivas (CC)?

Una secuencia de dos caras consecutivas puede ocurrir en el primer lugar, en el segundo, o en el tercero. Llamemos A al evento "ocurre al menos un par de caras consecutivas", y para $i = 1, 2, 3$ llamemos A_i al evento "ocurre un par de caras consecutivas en el lugar i". Notar que esto último equivale a "ocurre C en los lanzamientos i e $i + 1$".

El espacio muestral es el conjunto de secuencias de caras y cruces de tamaño 4, que tiene en total 16 elementos, como se muestra en la Tabla 2. En la parte inferior de la tabla se indica con un asterisco si el resultado correspondiente a esa columna pertenece al evento A_i, para $i = 1, 2, 3$.

Claramente tenemos $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Además, de la tabla deducimos inmediatamente que $|A| = 8$, ya que el evento A consiste de aquellas columnas que tienen al menos un asterisco marcado. Luego $P(A) = 1/2$.

	Resultado															
1er	C	C	C	C	C	C	C	C	X	X	X	X	X	X	X	X
2do	C	C	C	C	X	X	X	X	C	C	C	C	X	X	X	X
3er	C	C	X	X	C	C	X	X	C	C	X	X	C	C	X	X
4to	C	X	C	X	C	X	C	X	C	X	C	X	C	X	C	X
A_1	*	*	*	*												
A_2	*	*							*	*						
A_3	*				*				*				*			

Tabla 2: Los 16 resultados posibles de lanzar 4 veces una moneda. Cada columna es una secuencia posible.

Por otro lado, podemos calcular el cardinal de A usando el principio de inclusión-exclusión. Primero, observar que

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 4.$$

Si sumamos los tres cardinales obtenemos

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| = 12 > 8$$

ya que estamos contando los elementos de las intersecciones al menos dos veces. Corresponde entonces restar los cardinales de las intersecciones:

$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = 2, \quad |A_1 \cap A_3| = 1.$$

De aquí resulta

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| = 12 - 5 = 7 < 8.$$

Nos hemos pasado en 1, y esto es porque el elemento que está en la intersección de los tres eventos lo hemos restado 3 veces. Debemos sumar entonces $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$. ■

El árbol de posibilidades y la regla del producto

Volvamos al ejemplo de lanzar una moneda tres veces. Para enumerar las distintas secuencias podemos dibujar un *árbol de posibilidades*. Ver la Figura 5. Si seguimos todas la posibles ramas desde el origen *o* hasta el borde derecho del árbol, obtenemos las 8 secuencias posibles.[9]

[9] *Para pensar*: el árbol de posibilidades, ¿cuenta secuencias ordenadas, o el orden no es importante?

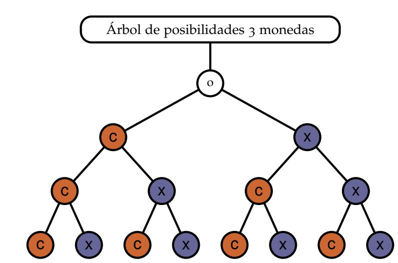
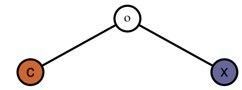


Figura 5: Árbol de posibilidades para el lanzamiento de tres monedas.

Usando el árbol podemos contar las posibilidades de la siguiente manera. Cada posibilidad queda determinada por una secuencia de C's o X's, por lo que debemos llenar los tres espacios que representan lo que sale en cada lanzamiento:

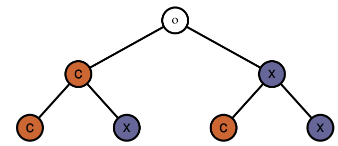
En el primer lugar, podemos poner C o X. Por lo tanto, el primer espacio puede llenarse de 2 maneras:

2		



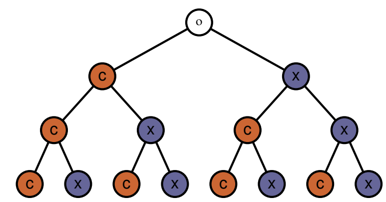
Esto está indicado en el árbol por las 2 ramas que salen del origen o y que terminan en la primera fila. Para cada una de las 2 maneras de llenar el primer espacio, tenemos 2 maneras de llenar el segundo:

2	2	



Esto está indicado en el árbol por las 2 ramas que salen de cada una de los nodos de la primera fila. Luego podemos llenar los primeros dos espacios de $2 \times 2 = 4$ formas distintas. ¿Ya ven el final no? Por último, para cada una de estas 4 formas de llenar el primer y segundo espacio, tenemos 2 maneras de llenar el tercero:

2	2	2



Entonces, el total de posibilidades para llenar los tres espacios con C's o X's es $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$.

No es necesario que las maneras de llenar los espacios sean siempre iguales. El razonamiento sigue siendo válido incluso si las opciones para realizar la segunda acción dependen de lo que se haya hecho en la primera. Lo único que realmente importa es que la cantidad de opciones para realizar la segunda acción no dependa de la opción elegida para realizar la primera.

Para pensar: Si en lugar de lanzar tres veces la moneda, lo hacemos n veces, ¿cuántas posibilidades hay?

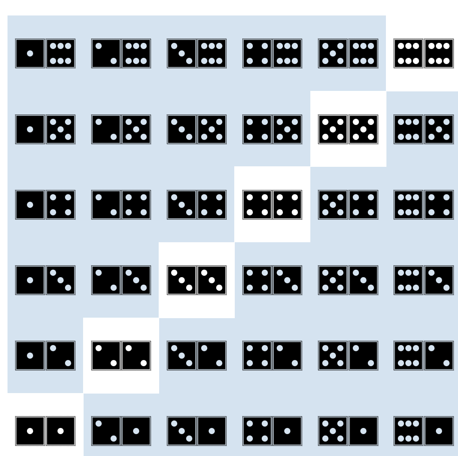
Ejemplo 5 Si lanzamos dos dados distinguibles, el número total de posibilidades es $6 \times 6 = 36$. Pero el evento

$$A = \text{“los resultados son distintos”}$$

tiene $6 \times 5 = 30$ casos favorables:

6	5

Para cada una de las 6 formas de llenar el primer espacio, tenemos 5 formas de llenar el segundo.



Entonces

$$P(A) = \frac{6 \times 5}{6 \times 6} = \frac{5}{6}.$$

Otra forma de ver esto es que sin importar lo que salga en el primer dado, la probabilidad de que el segundo sea diferente es $5/6$. ■

Para pensar: No es importante el orden en el que llenamos los espacios. Podríamos haber dicho:

5	6

hay 6 maneras de llenar el segundo, y para cada una de ellas, hay 5 formas de llenar el primero. El resultado es el mismo. Esta trivialidad tiene consecuencias que parecen menos obvias cuando se las ve por primera vez. Más adelante volveremos sobre este punto.

Cuando el número de objetos en un conjunto es moderadamente grande, el número de posibilidades para un evento no puede dibujarse en un árbol de posibilidades. Afortunadamente, el razonamiento que hicimos con los espacios vacíos se puede extender y usar como método general para contar posibilidades, siempre teniendo en cuenta que para los árboles de posibilidades el orden es esencial. La generalización de este método es la famosa *regla del producto*.

Regla del producto

Si se puede realizar una operación de n_1 maneras y, después de realizarla de cualquiera de estas maneras, se puede realizar una segunda operación de n_2 maneras y, después de realizarla de cualquiera de estas formas, se puede realizar una tercera operación de n_3 maneras, y así sucesivamente para k operaciones, entonces las k operaciones se pueden realizar juntas y en ese orden de

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$$

maneras distintas.

Orden y regla del producto: Recordar que la regla del producto siempre cuenta secuencias ordenadas.

Tener en cuenta el orden, ¿sí o no?

En todos los ejemplos y ejercicios que veamos en este curso, contar posibilidades se corresponderá con contar secuencias de símbolos con determinadas propiedades. ¿Qué queremos decir con esto? Por ejemplo, si lanzamos dos monedas, los resultados posibles podemos escribirlos como CC, CX, XC, XX, o incluso CC, CX, XX si el orden no es relevante.

He aquí entonces la primera cuestión fundamental a la hora de contar posibilidades: el orden ¿es relevante o no? Aunque parezca paradójico, es más fácil contar posibilidades cuando sí lo es. ¿Por qué? Porque podemos usar la regla del producto.

¿Distinguibles o indistinguibles? Muchas veces el orden se puede traducir en que los objetos sean distinguibles. Para determinar si el orden es relevante, suele ser útil preguntarse ¿son los objetos distinguibles? Si etiquetamos los objetos, ¿cambian el experimento y las probabilidades?

Ejemplo 6 Que el orden sea relevante o no depende del problema concreto en cuestión. Por ejemplo, si queremos que nuestros cálculos reflejen lo que ocurre en el lanzamiento *real* de dos monedas idénticas, ¿debemos tener en cuenta el orden a la hora de contar?

Al ser las monedas idénticas, es difícil distinguir cuál es cuál, y parecería más razonable contar las posibilidades sin tener en cuenta el orden, como en CC, CX, y XX. Si usamos el principio de indiferencia, cada una tendría probabilidad $1/3$. Sin embargo, también es cierto que cada moneda tiene su identidad propia, a pesar de que no las podamos distinguir, y resultaría razonable suponer que el caso CX cuenta el doble que los otros dos. Si contáramos las posibilidades con orden, CC, CX, XC, CC, tendrían probabilidad $1/4$ cada una. ■

¿Cuál es la opción correcta? En realidad, la teoría que vamos a estudiar no da una respuesta. Ésta solo se encarga de decirnos lo que pasa después de haber definido los casos posibles, y esto debemos hacerlo nosotros de forma independiente y un tanto arbitraria.

Tabla 3: Resultados de tirar 500 veces dos monedas. Los números representan porcentajes.

Resultado			
CC	CX	XC	XX
26.2	26.4	23.4	24.0

En el caso de las monedas podemos razonar de la siguiente manera: si bien es cierto que las monedas son idénticas, ¿qué pasa si marcamos una de ellas? ¿cambia esto en algo lo que ocurrirá al lanzarlas? Parece obvio que no. E incluso, podríamos lanzar una y luego la otra, y esto tampoco cambiaría las cosas. Mas aún, podríamos filmar el lanzamiento y seguir en cámara lenta la trayectoria de cada moneda. En este caso es fácil decantarse por la segunda opción en la cual el orden es importante, pero a veces puede ser menos obvio.

De todas formas, la única manera de saldar el asunto es con una simulación. La Tabla 3 al margen muestra los resultados de 500 lanzamientos de dos monedas reales.[10] Los valores son muy cercanos al valor ideal de 25 %.

[10] Los datos son reales. 500 lanzamientos dos monedas de $2, una de ellas marcada. Como dato curioso, una de las monedas salió cara 14 veces seguidas. ¿Sorprendente?

Arreglos y permutaciones

La regla del producto será más que suficiente para contar posibilidades en todos los ejemplos y problemas que veamos en el curso. Sin embargo, los productos de enteros consecutivos que aparecieron en los ejemplos anteriores, son tan frecuentes que vale la pena usar palabras especiales para ellos.

¿De cuántas formas podemos elegir k elementos distintos de una lista de n elementos distintos? Denotemos los n elementos por $*_1, \ldots, *_n$. Estos pueden ser de cualquier tipo, eso no es relevante ahora. Notar que la lista original no tiene ningún orden pre-establecido, lo único que importa es que los elementos son todos distintos y los hemos numerado arbitrariamente de 1 a n para poder distinguirlos. Es como ponerle un nombre a cada uno.

Las permutaciones recursivamente. Una forma alternativa de deducir la fórmula de las permutaciones es razonar inductivamente.

Si hemos colocado en orden j elementos, podemos colocar un $(j+1)$-ésimo en $j+1$ lugares distintos:

$$_{\uparrow}(\text{objeto}_1)_{\uparrow}(\text{objeto}_2)_{\uparrow}\cdots{}_{\uparrow}(\text{objeto}_j)_{\uparrow}$$

Luego, si denotamos $P(j)$ las permutaciones de j elementos, vemos que

$$P(j) = j \times P(j-1).$$

De aquí deducimos que $P(j) = j!$.

Queremos formar una lista ordenada

		$\cdots$		
1	2	$\cdots$	$k-1$	k

en donde hay un primer elemento, un segundo elemento, y así sucesivamente hasta el k-ésimo elemento. La elección de los k elementos se puede hacer por etapas, contando cuántas posibilidades hay en cada una:

n	$n-1$	$\cdots$	$n-(k-2)$	$n-(k-1)$
1	2	$\cdots$	$k-1$	k

Esto es, hay n posibilidades para elegir el primer elemento, $n-1$ para elegir el segundo, y así sucesivamente hasta el último para el cual tenemos $n-k+1$ posibilidades. Entonces, el número total de listas ordenadas que podemos formar es

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1).$$

Este número se llama *arreglos de n en k* o *permutaciones de n en k*, y lo denotamos por $(n)_k$. También se suele denotar por A^n_k.

Arreglos de n en k

El número total de listas ordenadas de tamaño k formadas a partir de un conjunto de n elementos es

$$A^n_k = (n)_k = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}_{k \text{ factores}}$$

para $1 \leq k \leq n$.

Podemos escribir este número de forma más compacta usando factoriales

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

e incluso extender la definición al caso $k = 0$ poniendo $(n)_0 = 1$. En el caso especial en el cual $k = n$, obtenemos todas las formas posibles en que podemos ordenar un conjunto de n elementos. En este caso escribimos simplemente $n!$ en lugar de $(n)_n$.

Combinaciones

Consideremos el caso ahora en el que el orden no es relevante. ¿Cuántas listas no ordenadas hay? Comencemos con un ejemplo concreto, luego de entenderlo el caso general será obvio. Supongamos que $n = 4$ y que queremos elegir $k = 2$ elementos. Llamemos A, B, C, y D a los elementos. Por lo anterior, hay $(4)_2 = 12$ listas ordenadas de dos elementos, como se muestra en la parte izquierda del diagrama al margen.

Ordenadas			Desordenadas
(A,B)	(B,A)	$\longrightarrow$	$\{A,B\}$
(C,D)	(D,C)	$\longrightarrow$	$\{C,D\}$
(A,D)	(D,A)	$\longrightarrow$	$\{A,D\}$
(A,C)	(C,A)	$\longrightarrow$	$\{A,C\}$
(B,C)	(C,B)	$\longrightarrow$	$\{B,C\}$
(B,D)	(D,B)	$\longrightarrow$	$\{B,D\}$

Hemos puesto listas entre paréntesis curvos para indicar que son ordenadas, y entre llaves para indicar que no lo son. Siempre que precisemos hacer esta distinción usaremos esta notación.

Lo que el diagrama muestra es que por cada posibilidad no ordenada, hay dos posibilidades ordenadas, y por lo tanto

$$\text{total de listas desordenadas} = \frac{\text{total de listas ordenadas}}{2}.$$

En general es igual. Imaginemos que hemos elegido una lista no ordenada de k elementos. Podemos ordenarlos de $k!$ formas distintas. Además, si las listas no ordenadas son diferentes, también lo serán las listas ordenadas que así formemos. Esto quiere decir que por cada lista no ordenada hay $k!$ listas ordenadas distintas:

$$\boxed{\text{listas ordenadas}} \xrightarrow{k! \text{ a } 1} \boxed{\text{listas desordenadas}}$$

El número total de listas no ordenadas que podemos formar es entonces $(n)_k/k!$. Este número se llama *combinaciones de n en k* y lo escribiremos $\binom{n}{k}$. También es común encontrarlo escrito como C^n_k.

Combinaciones de n en k

El número total de listas no ordenadas de tamaño k formadas a partir de un conjunto de n elementos distintos es

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

para $0 \leq k \leq n$.

Las combinaciones recursivamente. Al igual que con las permutaciones, podemos calcular combinaciones de forma recursiva.

Las listas sin orden de k objetos tomados de a n se pueden dividir en aquellas que contienen a $*_1$ y aquellas que no.

Por ejemplo, si $n = 5$ y $k = 3$, esta división corresponde a

Tienen a $*_1$	No tienen a $*_1$
$*_1 *_2 *_3$	$*_2 *_3 *_4$
$*_1 *_2 *_4$	$*_2 *_3 *_5$
$*_1 *_2 *_5$	$*_2 *_4 *_5$
$*_1 *_3 *_4$	$*_3 *_4 *_5$
$*_1 *_3 *_5$	
$*_1 *_4 *_5$	

Así que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Esta fórmula recursiva permite calcular las combinaciones de n objetos a partir de las de $n-1$ objetos.

Además, es la fórmula que está detrás del famoso triángulo de Pascal:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Respuesta al Ejemplo 2

Nos queda pendiente responder a la probabilidad de obtener un par en una mano de poker. Con las herramientas que tenemos ahora no será difícil. El total de manos posibles es $\binom{52}{5} = 2598960$, pues una mano consta de 5 cartas elegidas al azar de un mazo de 52 cartas.

Para contar los casos favorables a un par, podemos dividir la tarea de la siguiente forma: primero elegimos el valor del par (recordar que los valores son 2, 3, ..., 10, J, Q, K, A). Una vez hecho esto, elegimos los dos palos de las cartas que formaran el par. Luego debemos elegir tres cartas de valores distintos, tanto al del par como entre ellas. Usando la regla del producto, la cuenta queda

$$\underbrace{13}_{\substack{\text{Valor}\\\text{del par}}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\substack{\text{Palos}\\\text{del par}}} \cdot \underbrace{?}_{\text{3 cartas restantes}}$$

Nos falta calcular de cuántas formas podemos elegir tres cartas de diferentes valores entre ellas, y además de valor diferente al par. Para esto aplicamos nuevamente la regla del producto: tenemos 12 formas de elegir el valor de la 3era carta, y 4 palos posibles, 11 valores para la 4ta, y 4 palos posibles, 10 valores para la 5ta, y 4 palos posibles. Esto daría $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 4^3$. Pero hay que recordar que la regla del producto tiene en cuenta el orden, por lo que debemos dividir entre las formas posibles de desordenar 3 cartas, esto es $3!$. Así la respuesta final es

$$\underbrace{13}_{\substack{\text{Valor}\\\text{del par}}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\substack{\text{Palos}\\\text{del par}}} \cdot \underbrace{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 4^3}{3!}}_{\text{3 cartas restantes}} = 1098240.$$

Luego, la probabilidad que buscamos es

$$\frac{1098240}{2598960} \approx 0.4226.$$

¿Qué tan cerca estuvo tu intuición de este valor?

Resumen del cálculo

1. Elegimos el valor para el par

   $$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}$$

   13 posibilidades

2. Elegimos los palos del par

   $$\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$$

   $\binom{4}{2}$ posibilidades

3. Elegimos el valor y palo de la 3era carta

   12×4 posibilidades

4. Elegimos el valor y palo de la 4ta carta

   11×4 posibilidades

5. Elegimos el valor y palo de la 5ta carta

   10×4 posibilidades

6. Sacamos el orden de las 3 últimas cartas

   dividimos entre $3!$