

# COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES

## Carga Axial

Año 2023



**ANEP**

ADMINISTRACIÓN  
NACIONAL DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY



**IIMPI**  
INSTITUTO DE  
INGENIERÍA, MECÁNICA  
Y PRODUCCIÓN INDUSTRIAL

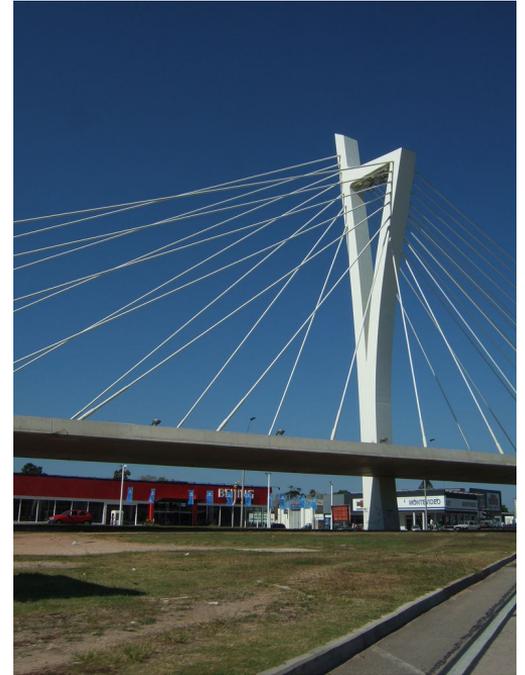
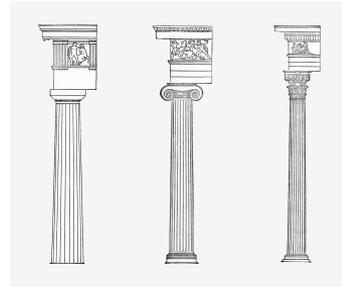
# Introducción

Habiendo estudiado la relación que existe entre el esfuerzo y la deformación de los materiales elásticos surge la pregunta de ***¿Cómo se calculan esos esfuerzos?***

La respuesta depende del tipo de carga a la que se someta el material. En este tema abordaremos un tipo de carga denominada axial.

En el ámbito industrial y estructural existen diversos elementos que pueden ser modelados como carga axial: bielas, tensores, columnas.

También estudiaremos en este capítulo cómo afectan los aumentos o descensos de temperaturas a estos elementos.



# Fuerza interna

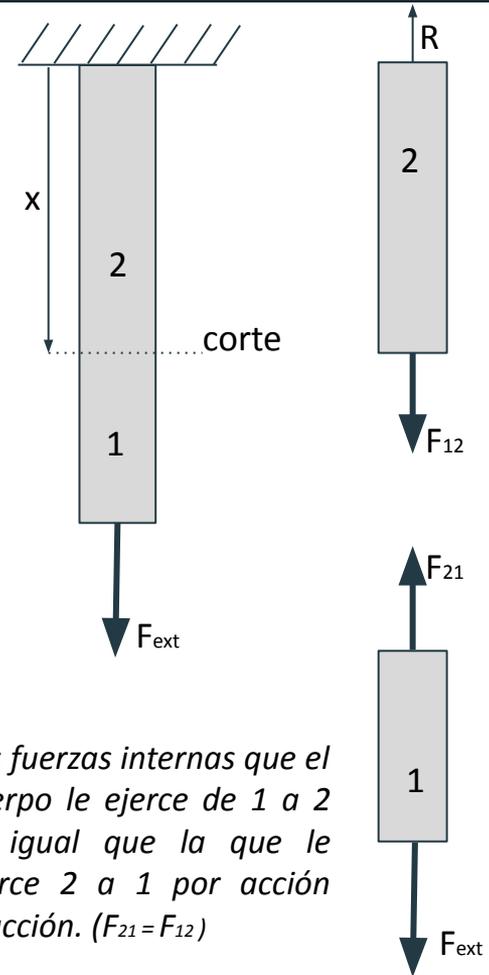
En esta sección nos adentraremos al interior del material, al seccionarlo modelamos acciones dinámicas que se denominan **FUERZAS INTERNAS**.

Cuando cortamos o seccionamos el cuerpo y realizamos un cierto diagrama de cuerpo libre, **la parte que dejamos afuera ejerce fuerzas y momentos**.

Para estudiar los esfuerzos y las deformaciones, estas fuerzas y momentos **son determinantes**.

*¿Cómo cambian estas fuerzas y momentos en las diferentes secciones del cuerpo?*

La respuesta se encuentra en algo que llamaremos **diagramas de carga**.



# Barra a tracción

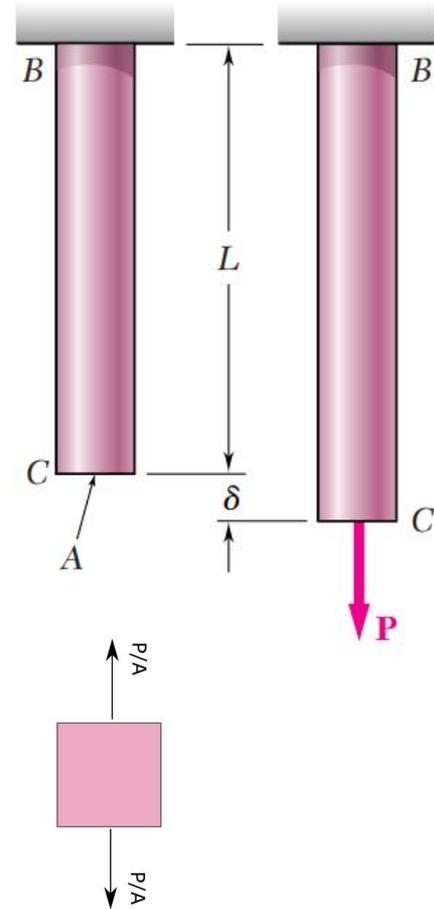
Considere una varilla homogénea BC de longitud  $L$  y sección transversal uniforme de área  $A$  sujeta a una carga axial centrada  $P$ . Si el esfuerzo axial resultante **no excede el límite de proporcionalidad del material**, se aplica la ley de Hooke y se escribe:  $\sigma = E \epsilon$

Como la sección y el largo son uniformes:  $\delta = \epsilon L$

Dado el siguiente estado tensional el esfuerzo cumple:  $\sigma = \frac{P}{A}$

Podemos hallar entonces la relación entre el estiramiento  $\delta$  y la fuerza axial  $P$ :

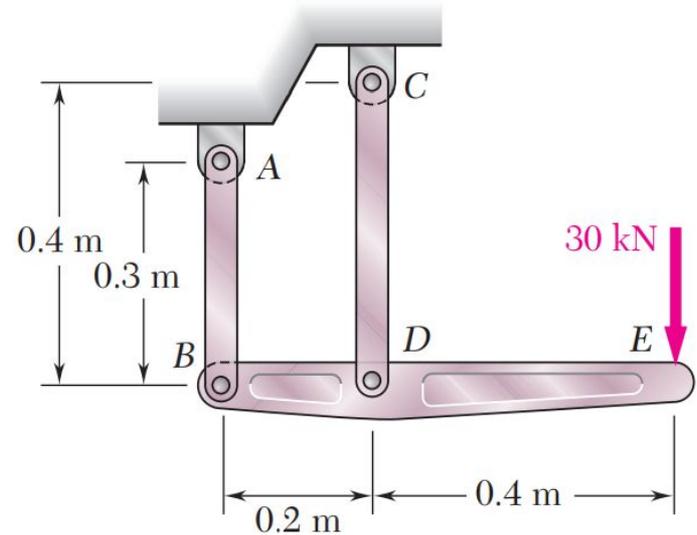
$$\delta = \frac{PL}{AE}$$



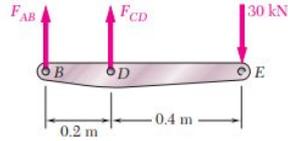
# Ejemplo

La barra rígida BDE se soporta en dos eslabones AB y CD. El eslabón AB es hecho de aluminio ( $E = 70 \text{ GPa}$ ) y tiene un área de sección transversal de  $500 \text{ mm}^2$ ; el eslabón CD es de acero ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) y tiene un área de sección transversal de  $600 \text{ mm}^2$ . Para la fuerza mostrada de  $30 \text{ kN}$ , determine la deflexión de:

1. Del punto B
2. Del punto D
3. Del punto E
4. El esfuerzo en AB



# Solución:



## Cuerpo libre: barra BDE

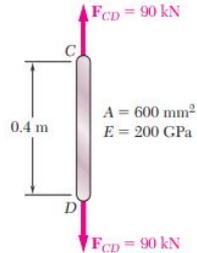
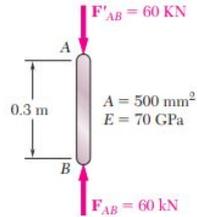
$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma M_B = 0: & \quad -(30 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) + F_{CD}(0.2 \text{ m}) = 0 \\
 & \quad F_{CD} = +90 \text{ kN} \quad F_{CD} = 90 \text{ kN} \text{ tensión} \\
 +\uparrow \Sigma M_D = 0: & \quad -(30 \text{ kN})(0.4 \text{ m}) - F_{AB}(0.2 \text{ m}) = 0 \\
 & \quad F_{AB} = -60 \text{ kN} \quad F_{AB} = 60 \text{ kN} \text{ compresión}
 \end{aligned}$$

**a) Deflexión de B.** Como la fuerza interna en el eslabón AB es compresiva, tenemos que  $P = -60 \text{ kN}$

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0.3 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6} \text{ m}$$

El signo negativo indica una contracción del elemento AB y, por lo tanto, una deflexión hacia arriba de B:

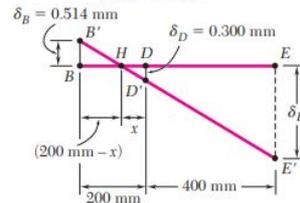
$$\delta_B = 0.514 \text{ mm} \uparrow \blacktriangleleft$$



**b) Deflexión de D.** Como la varilla CD,  $P = 90 \text{ kN}$ , se escribe

$$\begin{aligned}
 \delta_D &= \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0.4 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Pa})} \\
 &= 300 \times 10^{-6} \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$\delta_D = 0.300 \text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$



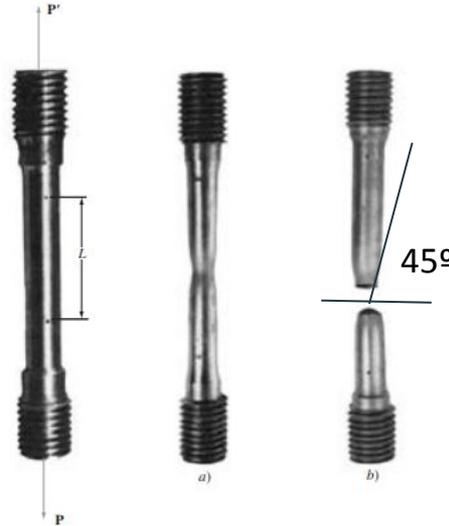
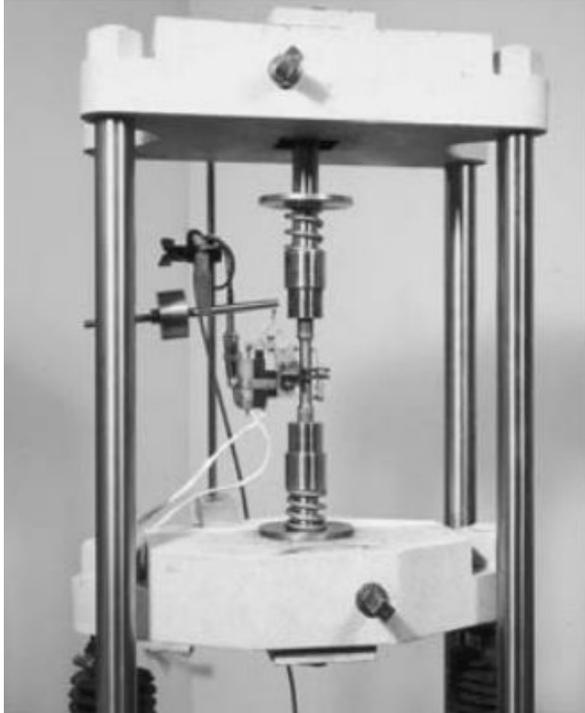
**c) Deflexión de E.** Se denota con  $B'$  y  $D'$  las posiciones desplazadas de los puntos B y D. Ya que la barra BDE es rígida, los puntos  $B'$ ,  $D'$  y  $E'$  se encuentran en línea recta y se escribe:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \quad \frac{0.514 \text{ mm}}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(200 \text{ mm}) - x}{x} \quad x = 73.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \quad \frac{\delta_E}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(400 \text{ mm}) + (73.7 \text{ mm})}{73.7 \text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1.928 \text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

# Ensayo de Tracción

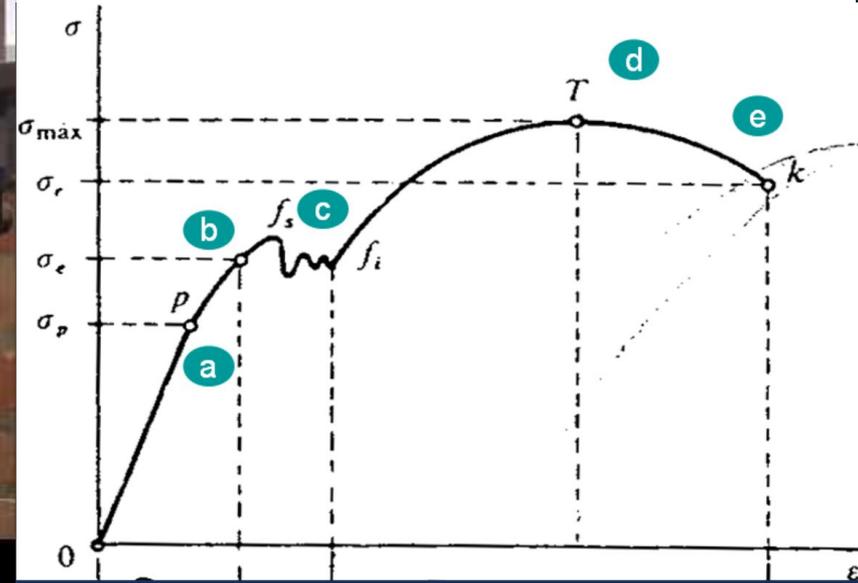


¿Por qué el ángulo de rotura es  $45^\circ$ ?

Para eso debemos:

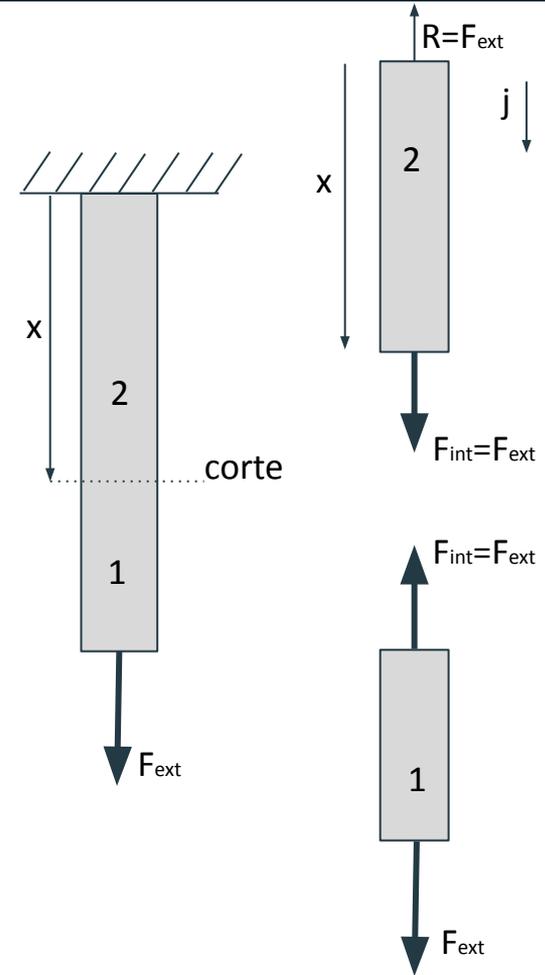
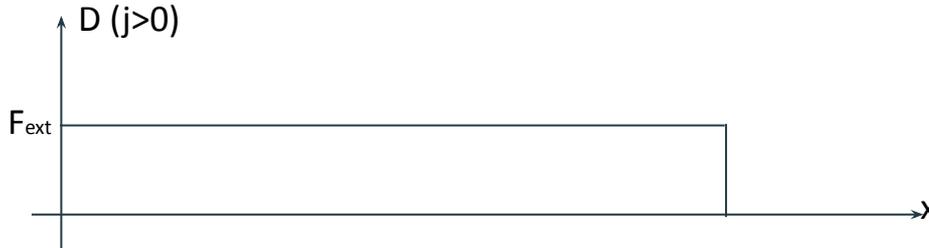
1. aislar el cuerpo
2. realizar un diagrama de directa por secciones
3. Estudiar el punto más comprometido

# Diagrama esfuerzo-deformación



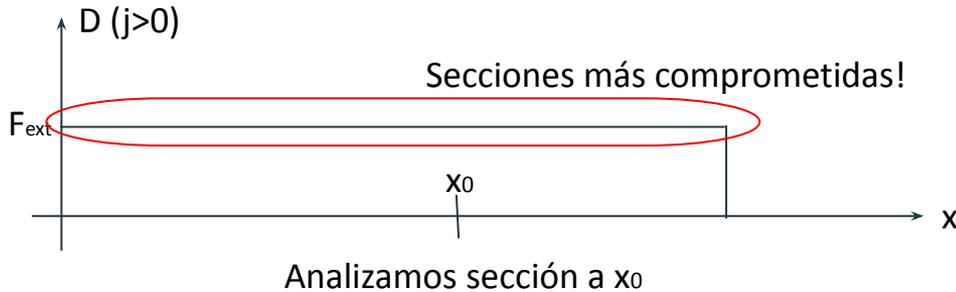
# Diagrama de directa o fuerza axial

- Luego de realizar el DCL del cuerpo de estudio aislando de esta manera los vínculos y restricciones, realizar un estudio **inmanente o interior al objeto**.
- Para esto seccionamos al cuerpo en sub-cuerpos donde identifiquemos que habrá un salto de la fuerza de directa. Esto sucederá en los **puntos donde se apliquen fuerzas externas**.
- Estas discontinuidades de fuerza interna están relacionadas con las fuerzas externas que se ejercen sobre los cuerpos, modificando el valor de la fuerza interna.
- El diagrama de directa contiene la información de cuánto vale la fuerza interna axial en cada sección.
- Como la fuerza es una magnitud vectorial **necesitamos una convención**:
  - **Fuerzas de tracción (Positiva +)**
  - **Fuerzas de compresión (Negativas -)**

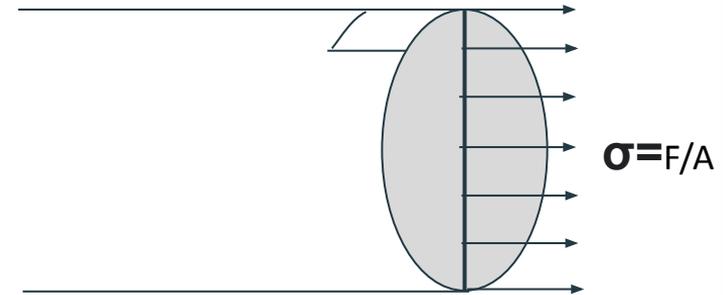
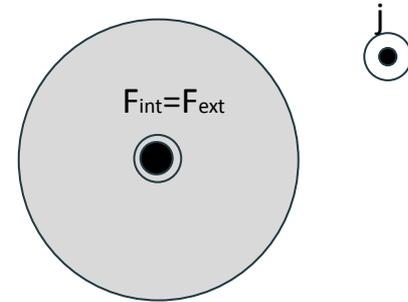


# Análisis de secciones

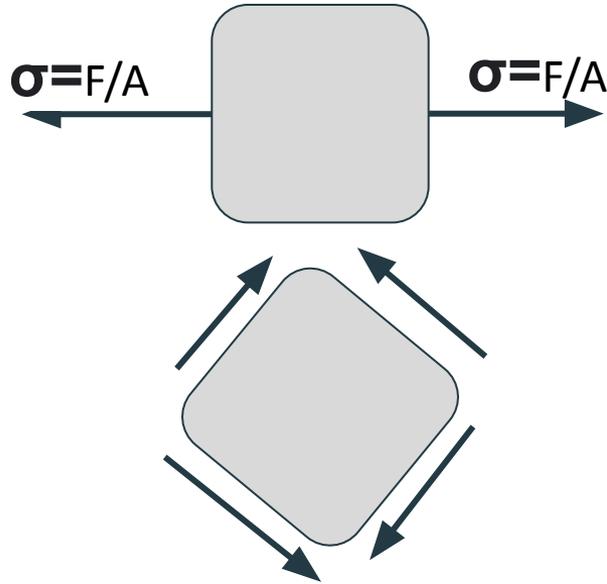
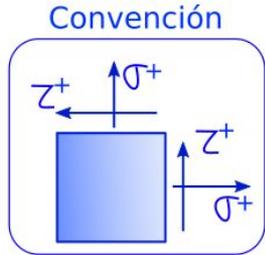
- Para encontrar cual es el punto más exigido de la pieza primero debemos identificar **en qué sección se dan las mayores fuerzas y momentos**.
- Esta información nos la indica **el diagrama de directa**.
- Para el caso de la probeta a tracción, todas las secciones son la más comprometida porque la fuerza de directa es constante.
- Hacer un análisis de esa sección nos proporcionará el **estado tensional** del punto más comprometido.



Sección más comprometida:



# Análisis de esfuerzo cortante máximo



El punto más comprometido de la pieza se asocia con diferentes criterios de falla... por ahora será aquel que posea **el mayor esfuerzo cortante máximo**

$$\tau_{max} \leq \tau_{max} | \text{Ensayo tracción}$$

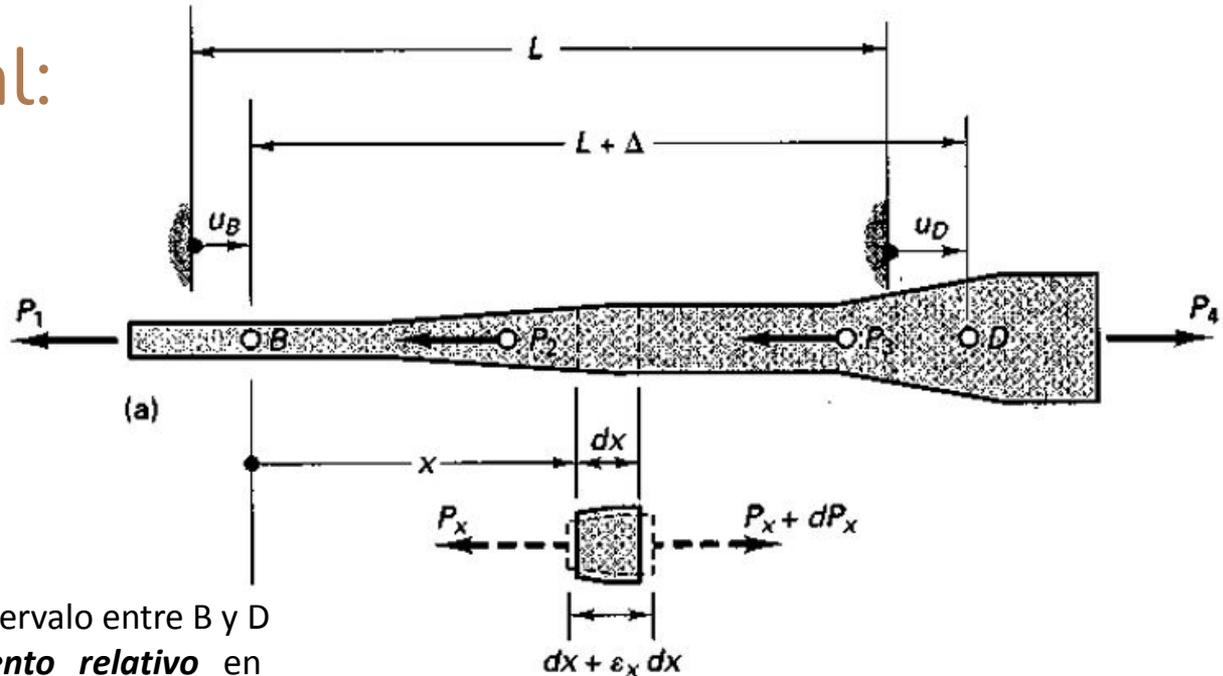
# Ejemplo integral:

Recordemos la definición de deformación unitaria en su forma diferencial. Es la variación de los desplazamientos en la coordenada axial de la pieza.

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Al integrar esta magnitud entre el intervalo entre B y D se puede calcular el **desplazamiento relativo** en términos del esfuerzo y el módulo de elasticidad de los desplazamientos.

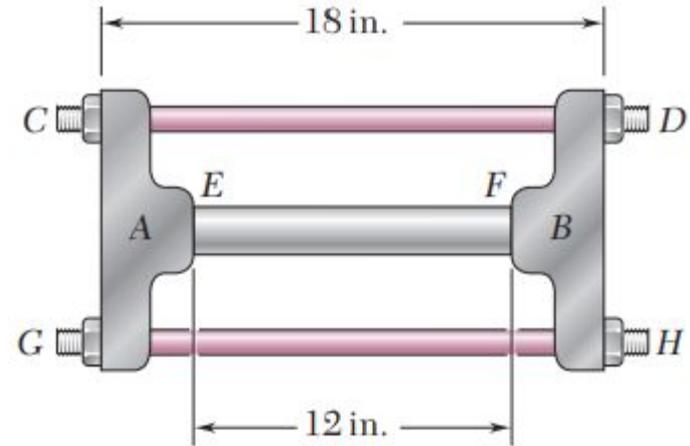
$$u(D) - u(B) = \int_L \varepsilon_x dx = \int_L \frac{\sigma(x)}{E} dx = \int_L \frac{P(x)}{EA(x)} dx$$



## Ejemplo compuesto:

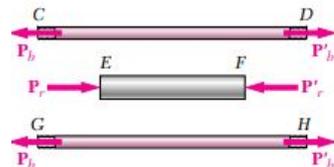
Las piezas de fundición A y B están conectadas por dos pernos de acero de  $\frac{1}{2}$  in de diámetro (CD y GH). Se encuentran en contacto con los extremos de una varilla de aluminio de 1.5 in. de diámetro EF. Cada perno tiene una cuerda única con un paso de 0.1 in. y, después de ajustarse, las tuercas D y H se aprietan un cuarto de vuelta.

Sabiendo que E es de  $29 \times 10^6$  psi para el acero y  $10.6 \times 10^6$  psi para el aluminio, **¿Cual es el valor del el esfuerzo normal máximo?**



## SOLUCIÓN

### Deformaciones



**Pernos CD y GH.** Al apretar las tuercas se tensan los pernos. Debido a la simetría, ambas están sometidas a la misma fuerza interna  $P_b$  y sufren la misma deformación  $\delta_b$ . Se tiene

$$\delta_b = +\frac{P_b L_b}{A_b E_b} = +\frac{P_b(18 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(0.75 \text{ in.})^2(29 \times 10^6 \text{ psi})} = +1.405 \times 10^{-6} P_b \quad (1)$$

**Varilla EF.** La varilla se encuentra en compresión. Si  $P_r$  es la magnitud de la fuerza en la varilla y  $\delta_r$  es su deformación, se tiene que

$$\delta_r = -\frac{P_r L_r}{A_r E_r} = -\frac{P_r(12 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in.})^2(10.6 \times 10^6 \text{ psi})} = -0.6406 \times 10^{-6} P_r \quad (2)$$

**Desplazamiento de D relativo a B.** Apretar las tuercas un cuarto de vuelta hace que los extremos  $D$  y  $H$  de los pernos sufran un desplazamiento de  $\frac{1}{4}(0.1 \text{ in.})$  relativo a la pieza  $B$ . Considerando el extremo  $D$ , se escribe

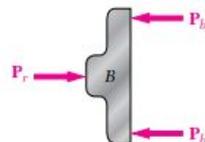
$$\delta_{D/B} = \frac{1}{4}(0.1 \text{ in.}) = 0.025 \text{ in.} \quad (3)$$

Pero  $\delta_{D/B} = \delta_D - \delta_B$ , donde  $\delta_D$  y  $\delta_B$  representan los desplazamientos de  $D$  y de  $B$ . Si se supone que la pieza  $A$  está sujeta en una posición fija mientras que las tuercas en  $D$  y en  $H$  se aprietan, estos desplazamientos son iguales a las deformaciones de los pernos y de la varilla, respectivamente. Se tiene, entonces,

$$\delta_{D/B} = \delta_b - \delta_r \quad (4)$$

Sustituyendo de las ecuaciones (1), (2) y (3) en la ecuación (4), se obtiene

$$0.025 \text{ in.} = 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6} P_r \quad (5)$$



### Cuerpo libre: fundición B

$$\rightarrow \Sigma F = 0: \quad P_r - 2P_b = 0 \quad P_r = 2P_b \quad (6)$$

### Fuerzas en pernos y varillas

Sustituyendo  $P_r$  de la ecuación (6) en la (5), se tiene

$$\begin{aligned} 0.025 \text{ in.} &= 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6}(2P_b) \\ P_b &= 9.307 \times 10^3 \text{ lb} = 9.307 \text{ kips} \\ P_r &= 2P_b = 2(9.307 \text{ kips}) = 18.61 \text{ kips} \end{aligned}$$

### Esfuerzo en la varilla

$$\sigma_r = \frac{P_r}{A_r} = \frac{18.61 \text{ kips}}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in.})^2} \quad \sigma_r = 10.53 \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$

# Caso hiperestático

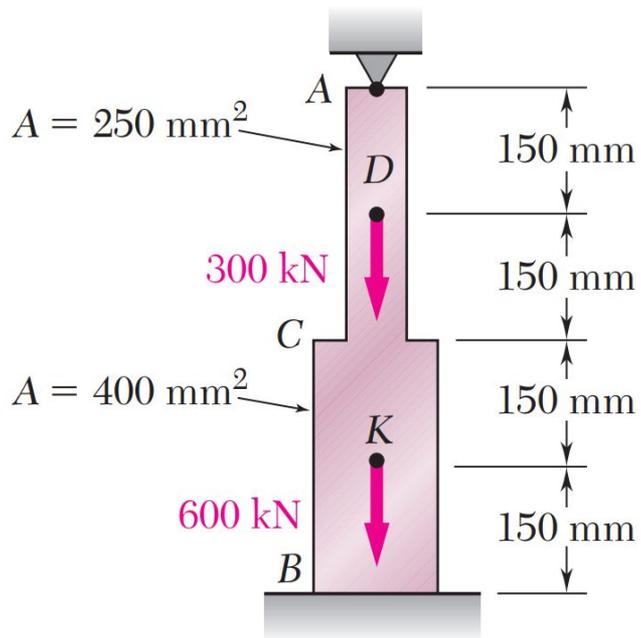
No siempre disponemos todas las ecuaciones dinámicas que garanticen el equilibrio y podamos resolver las incógnitas. ***¡¡Aprovechando el vínculo entre las deformaciones y las fuerzas podemos obtener ecuaciones de deformación extras!!***



Cuando aparecen vínculos adicionales a los que se requieren para estar en equilibrio las fuerzas internas están determinadas por las condiciones de borde cinemáticas

# Ejemplo hiperestático cambio de sección:

¿Reacciones en los nodos A y B?



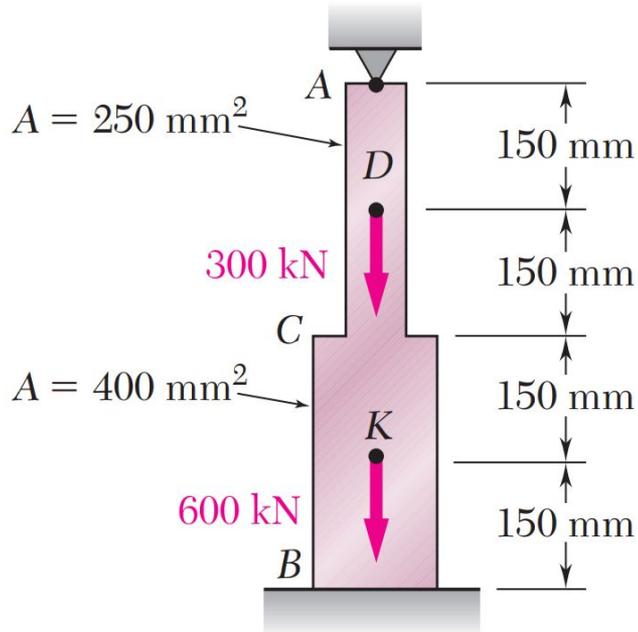
Para esto debemos calcular los desplazamientos relativos entre los nodos B y A. Como la deformación depende de la fuerza interna es **necesario entonces conocer la fuerza interna en cada parte del cuerpo**. Esta información se construye en el diagrama de directa. Este **cambia en los nodos que aparecen fuerzas externas axiales**. Una vez que conocemos la fuerza interna en cada sección procedemos a calcular las deformaciones para **imponer la condición de deformación**.

Para calcular lo que se deforma una parte del cuerpo respecto a otra debemos separar el cuerpo en tramos  $i$ . Estos tramos están definidos por los cambios en la deformación. La ecuación que determina el valor de deformación se va a ver alterada donde cambia: **la fuerza interna, el área o el material**.

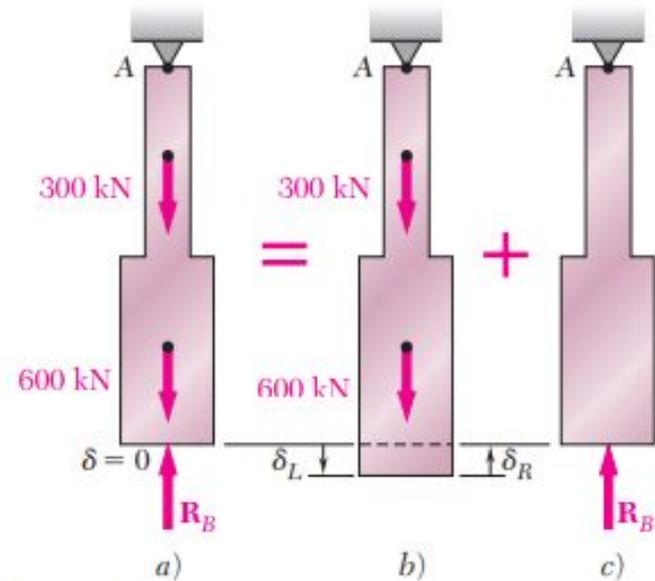
$$\delta_{A-B} = \sum_i \frac{F_{int,i} L_i}{A_i E_i}$$

# Ejemplo hiperestático

Determine las reacciones en A y en B para la barra de acero y la carga mostradas en la figura, suponiendo un ensamble ajustado en ambos apoyos antes de que se apliquen las cargas.



Problema equivalente:



# Ejemplo hiperestático

Planteando el equilibrio vertical:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

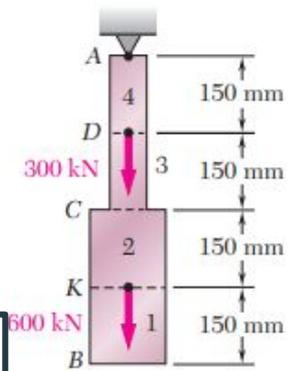
$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 577 \text{ kN} = 323 \text{ kN}$$

El desplazamiento total se resuelve aplicando superposición utilizando la **propiedad de linealidad**

$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3 \text{ N} \quad P_4 = 900 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150 \text{ m}$$



CONDICIÓN DE DEFORMACIÓN:

$$\delta_L = \sum_{i=1}^4 \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left( 0 + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{900 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right) \frac{0.150 \text{ m}}{E}$$

$$\delta_L = \frac{1.125 \times 10^9}{E} \quad (2.17)$$

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = - \frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E}$$

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E} = 0$$

$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

Determine las reacciones en A y en B para la barra de acero y carga del ejemplo 2.04, suponiendo ahora que existe un claro de 4.50 mm entre la barra y el piso antes de que se apliquen las cargas (figura 2.33). Suponga que  $E = 200$  GPa.

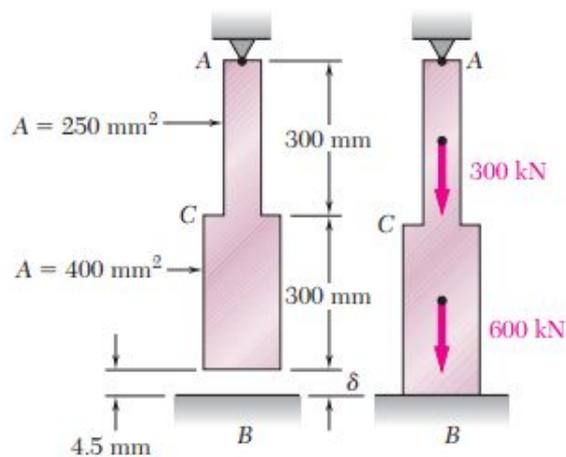


Figura 2.33

Se sigue el mismo procedimiento que en el ejemplo 2.04. Considerando la reacción en B como redundante, se calculan las deformaciones  $\delta_L$  y  $\delta_R$  causadas, respectivamente, por las cargas dadas y por la reacción redundante  $R_B$ . Sin embargo, en este caso la deformación total no es cero, sino  $\delta = 4.5$  mm. Por lo tanto, se escribe

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4.5 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (2.20)$$

Sustituyendo  $\delta_L$  y  $\delta_R$  de las ecuaciones (2.17) y (2.18) en la ecuación (2.20) y recordando que  $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$ , se tiene que

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{200 \times 10^9} - \frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{200 \times 10^9} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Despejando  $R_B$ , se obtiene

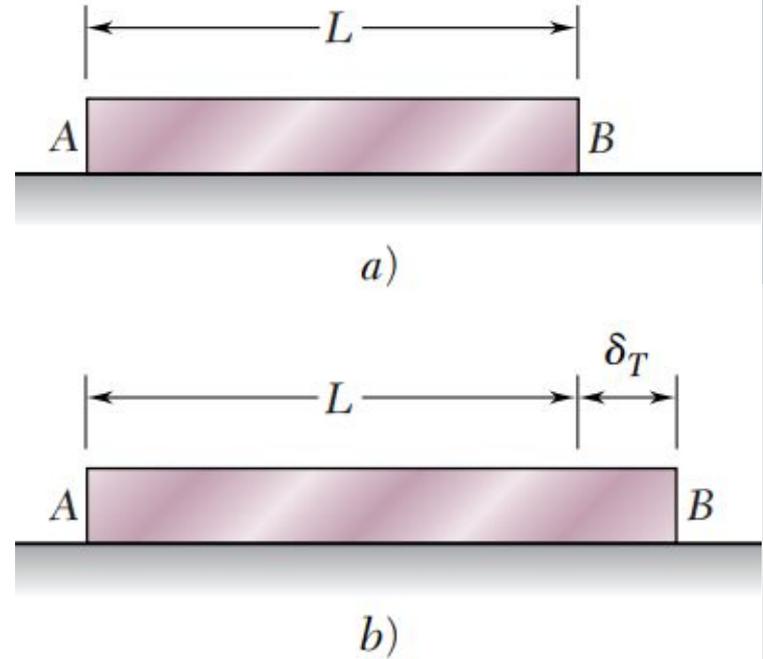
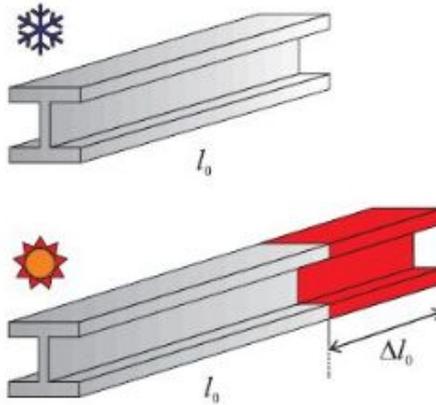
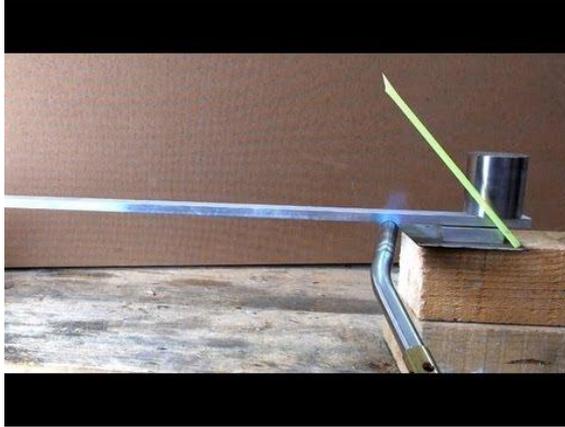
$$R_B = 115.4 \times 10^3 \text{ N} = 115.4 \text{ kN}$$

La reacción en A se obtiene del diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 2.32):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 115.4 \text{ kN} = 785 \text{ kN}$$

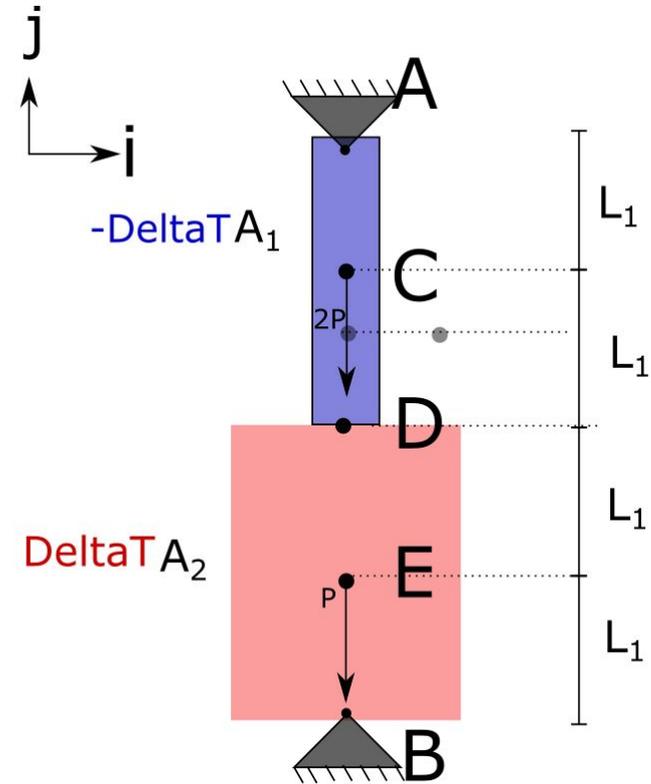
# Expansión térmica



$$\Delta l_0 = \delta_T = \alpha L_0 \Delta T = \alpha L_0 (T_f - T_i)$$

# Ejemplo hiperestático con temperatura:

El sistema de la figura consiste en dos barras soldadas identificadas con los colores salmón y violeta. A la barra AB se le aplica una fuerza de  $2P$  y la barra BC se le aplica una fuerza  $P$  ambas hacia abajo. Además la barra BC se enfría una temperatura de  $T_f$  mientras que la barra BC se calienta en igual magnitud. Si ambas barras están conformadas a partir del mismo material y tienen un área  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente se pide **calcular las reacciones en A y en B**.



# Ejemplo con temperatura y barras en ángulo:

La estructura que se muestra en la figura está integrada por tres barras ABC CD y BE. La barra ABC es rígida y mide un largo de  $L_1$ . La barra CD tiene un área  $A_3$ , un largo  $L_3$  y un módulo de elasticidad  $E_3$ . La barra BE tiene un largo  $L_2$ , un área  $A_2$  y un módulo de elasticidad  $E_2$ . **¿Cuánto es posible calentar la barra CD si el esfuerzo cortante máximo no puede superar un cierto valor  $\tau_{\max}$  para la barra BE ?**

