Comunicaciones Digitales

Práctico 3
Interferencia Intersimbólica y Pulsos de Nyquist

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil.

★ Ejercicio 1

Al muestrear una señal $x(t)$ de banda limitada W se generan muestras a una tasa de r muestras/s, las cuales se quieren trasmitir por un canal de ancho de banda B_T. Para esto las muestras se conforman con pulsos $p(t)$ antes de introducirlas al canal.

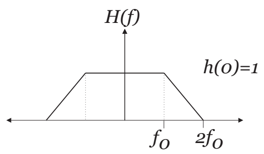
(a) Indicar entre qué valores puede variar r para que se pueda transmitir y posteriormente reconstruir la señal analógica original.

(b) Expresar la forma de la señal recibida en función de $x(t)$ y r, sabiendo que se para la transmisión se utilizan pulsos de Nyquist, y la recepción se realiza con pulso apareado.

(c) ¿Cómo deben ser los pulsos p(t) para que no exista interferencia intersimbólica (ISI)?

★ Ejercicio 2

Una señal discreta con tiempo entre muestras T_s, es introducida en un conformador $p(t)$, la cual es recibida con un pulso apareado $p(-t)$, teniendo como respuesta $H(f) = |P(f)|^2$.



Hallar la frecuencia f_o para que la señal conformada no posea interferencia intersimbólica. Justificar.

✷ Ejercicio 3

Una señal $x(t)$ se muestrea a frecuencia $r = \frac{1}{T}$. Cada muestra se codifica con cuatro bits, mapeados en 16 niveles distintos. La secuencia obtenida a_k será conformada con un pulso que definiremos más adelante.

(a) Dibujar la constelación utilizada y calcular las probabilidades de error de símbolo (P_e) y bit (P_{eb}) si la transmisión se realiza por un canal de atenuación L y que agrega ruido AWGN de densidad espectral de potencia $\frac{\eta}{2}$. El filtro de recepción es un pulso apareado.

(b) Si el pulso conformador se trata de un pasabajos ideal:

$$P(f) = \sqrt{T}.\pi \left(\frac{f}{2f_0} \right),$$

dar la frecuencia de corte f_0 de manera que no haya interferencia intersimbólica.

(c) Un pasabajos ideal es difícilmente aproximable. Normalmente se usan filtros de transición gradual. ¿Qué condiciones debe cumplir tal filtro para que la interferencia intersimbólica sea nula?

Un pulso conformador muy utilizado es el “Square Root Raised Cosine” (SRRC), cuyas expresiones analíticas en frecuencia y tiempo respectivamente son las siguientes:

$$P(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & 0 \le |f| \le \frac{1-\alpha}{2T} \\ \sqrt{T} cos\left(\frac{\pi|f|T}{2\alpha} - \frac{\pi(1-\alpha)}{4\alpha}\right) & \frac{1-\alpha}{2T} \le |f| \le \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases}$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{sin\left(\pi(1-\alpha)\frac{t}{T}\right) + \frac{4\alpha t}{T} cos\left(\pi(1+\alpha)\frac{t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}\left[1 - \left(\frac{4\alpha t}{T}\right)^2\right]}$$

(d) Bosquejar $R_p(f) = |P(f)|^2$ para distitnos valores de α.

(e) Evalúe $p(t)$ para $t = kT$. Analice el resultado.

✶ Ejercicio 4

Una forma más general del teorema de señalización de Nyquist establece que un pulso $r_p(t)$ con transformada de Fourier $R_p(f)$ no presenta ISI al ser muestreado con frecuencia $r = \frac{1}{T}$ si y sólo si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_p(f - nr) = \frac{1}{r} \qquad -\infty < f < \infty.$$

(a) Demostrar este teorema aplicando la transformada de Fourier en ambos lados de

$$r_p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_p(nT)\delta(t - nT)$$

y utilizando la formula de Poisson.

(b) Demostrar el teorema de simetría vestigial de Nyquist aplicando el teorema anterior a pulsos $r_p(t)$ reales y con ancho de banda menor o igual a r (esto es, $R_p(f) = 0$ para $|f| > r$).

Solución

Ejercicio 1

(a) Por el Teorema del Muestreo, se tiene que se debe cumplir que $r \geq 2W$ para poder reconstruir la señal a partir de sus muestras.

Por otro lado, si asumimos que los pulsos conformadores son pulsos de Nyquist, entonces el ancho de banda a transmitir será $B_T = \frac{r}{2} + \beta$. El resultado anterior puede ser minimizado al definir $\beta = 0$ para lograr $B_T = \frac{r}{2}$.
Finalmente, debe cumplirse que:

$$2B_T \geq r \geq 2W.$$

(b) Sea

$$x_T(t) = \sum_k a_k p\left(t - \frac{k}{r}\right)$$

la señal recibida, es posible ver que luego de pasarla por el filtro apareado con $h(t) = p(-t)$ su salida será

$$x_R(t) = x_T(t) * p(-t) = \sum_k a_k \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\tau - \frac{k}{r}\right) p(\tau - t)d\tau = \sum_k a_k r_p\left(t - \frac{k}{r}\right),$$

donde r_p es el pulso autocorrelación:

$$r_p = p(t) * p(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)p(\tau - t)d\tau.$$

(c) Si muestreamos la señal obtenida en la parte anterior cada tiempo de símbolo, $t = \frac{m}{r}$, tenemos que

$$x_R\left(\frac{m}{r}\right) = \sum_k a_k r_p\left(\frac{m}{r} - \frac{k}{r}\right) = \sum_k a_k r_p\left(\frac{m-k}{r}\right) = \sum_k a_k r_p\left(\frac{n}{r}\right),$$

con $n = m - k$.
No habrá interferencia intersimbólica si

$$r_p\left(\frac{n}{r}\right) = r_p(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, para que no haya ISI los pulsos $p(t)$ deben ser tales que su pulso autocorrelación $r_p(t) = p(t) * p(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)p(\tau - t)d\tau$ cumpla la condición anterior.

Ejercicio 2

Para no tener ISI sabemos que el pulso $p(t)$ debe ser tal que su pulso autocorrelación:

$$r_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)p(\tau - t)d\tau,$$

cumpla la siguiente condición:

$$r_p(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Y según el teorema "No-ISI" de Nyquist se cumple si y solo si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_p\left(f - \frac{k}{T}\right) = T,$$

con $R_p(f)$ la transformada de Fourier de $r_p(t)$.
De la letra de este problema es posible concluir que en este caso $R_p(f) = H(f)$, y que tiene simetría vestigial respecto a $\frac{3f_o}{2}$. Se pueden entonces identificar para este pulso los valores de $\beta = \frac{f_o}{2}$ y $\frac{r}{2} = \frac{3f_o}{2}$.

En consecuencia, dado que $r = \frac{1}{T_s}$, se tiene que $\frac{1}{T_s} = 3f_o$ y entonces $f_o = \frac{1}{3T_s}$.

Ejercicio 3

(a) En la figura 1 se muestra la constelación utilizada para la transmisión.

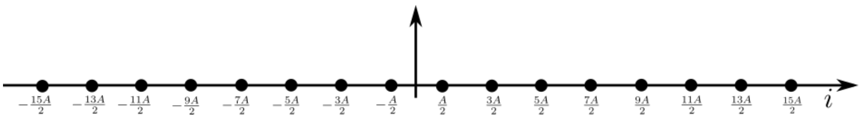


Figura 1: Constelación utilizada para la transmisión.

De la constelación anterior es posible deducir que la probabilidad de error de símbolo será

$$P_e = 2 \times Q\left(\frac{A}{2\sqrt{L}\sigma}\right) \times \frac{14}{16} + Q\left(\frac{A}{2\sqrt{L}\sigma}\right) \times \frac{2}{16} = \frac{15}{8} Q\left(\frac{A}{2\sqrt{L}\sigma}\right),$$

en tanto que su relación con la probabilidad de error de bit será

$$P_{eb} = \frac{Pe}{4} = \frac{15}{32} Q\left(\frac{A}{2\sqrt{L}\sigma}\right).$$

Por otro lado, es posible ver que la energía de símbolo vale

$$E_s = \frac{85}{4} A^2,$$

y la potencia del ruido vale

$$S_N = \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 \frac{\eta}{2} df = \frac{\eta}{2}.$$

Finalmente

$$P_e = \frac{15}{8} Q\left(\sqrt{\frac{6E_s}{15L\eta}}\right),$$

$$P_{eb} = \frac{15}{32} Q\left(\sqrt{\frac{6E_s}{15L\eta}}\right).$$

(b)

$$P(f) = \sqrt{T}.\pi\left(\frac{t}{2f_0}\right) \Rightarrow p(t) = \sqrt{T}f_0 sinc(2f_0 t)$$

Para estar seguros de no tener interferencia intersimbólica, no debemos estudiar a $p(t)$, sino al pulso autocorrelación:

$$r_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)p(\tau - t)d\tau,$$

que no es otra cosa que $p(t) * p(-t)$. Si bien puede no ser fácil calcular esa convolución, es posible ver que su respuesta en frecuencia será:

$$R_p(f) = |P(f)|^2 = T.\pi\left(\frac{t}{2f_0}\right).$$

Antitransformando el resultado anterior llegamos que:

$$r_p(t) = Tf_0 sinc(2f_0 t),$$

y se puede ver que $r_l(t) = 0 \quad \forall t = \frac{k}{2f_0}$, con $k \in Z^*$. Como se quiere que haya ceros cada $T = \frac{1}{r}$, entonces:

$$kT = \frac{k}{r} = \frac{k}{2f_0} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2T} = \frac{r}{2}.$$

Finalmente, si analizamos $R_p(f)$ es posible ver que se cumple que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_p\left(f - \frac{k}{T}\right) = T,$$

como dice el Teorema de Nyquist.

(c) Debe ser tal que su pulso autocorrelación:

$$r_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)p(\tau - t)d\tau,$$

cumpla la siguiente condición:

$$r_p(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Y según el teorema "No-ISI" de Nyquist se cumple si y solo si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_p\left(f - \frac{k}{T}\right) = T,$$

con $R_p(f)$ la transformada de Fourier de $r_p(t)$.

(d) Ver figura 2.

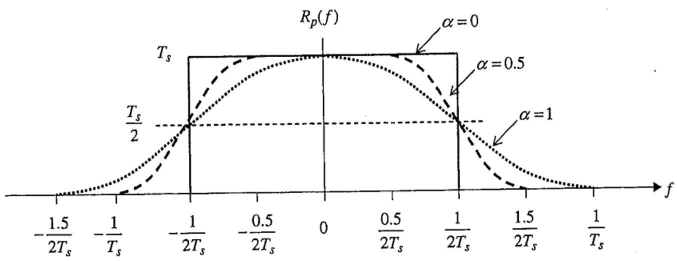


Figura 2: Respuesta en frecuencia de $r_p(t)$ para distintos valores de α. Imagen tomada del libro "Digital Communications - A Discrete Time Approach" de Michael Rice.

(e)

$$p(kT) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{sin\,(\pi(1-\alpha)k) + 4\alpha k.cos\,(\pi(1+\alpha)k)}{\pi k \left[1-(4\alpha k)^2\right]}$$

Es posible ver que el resultado anterior no toma valores nulos para ningún valor de k (a menos que α valga cero, y en ese caso volvemos al caso del filtro pasabajos ideal). Esto no contradice el análisis que hemos venido haciendo hasta el momento, ya que como se dijo en las partes anteriores, no es $p(t)$ quien deba valer 1 en $t = 0$ y 0 en $t = kT$, con $k \neq 0$; sino el pulso autocorrelación $r_p(t)$. De hecho, el pulso SRRC es construido a partir de un pulso autocorrelación que efectivametne cumple tal condición.

Ejercicio 4

(a) Aplicando la transformada de Fourier y la formula de Poisson obtenemos:

$$R_p(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_p(nT) e^{-j2\pi f nT}$$

que es lo mismo que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_p(f - nr) = \frac{1}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_p(nT) e^{-j2\pi f nT}$$

No hay ISI al muestrear con frecuencia r si $r_p(nT) = \delta[n]$, con lo que obtenemos el teorema:

$$r_p(nT) = \delta[n] \qquad \text{si y sólo si} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_p(f - nr) = \frac{1}{r} \qquad \forall f$$

(b) Por la forma de la suma es fácil ver que es periódica de período r, por lo tanto alcanza con probar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_p(f - nr) = \frac{1}{r} \qquad 0 \geq f \geq r$$

Como $R_p(f) = 0$ para $|f| > r$, lo que debemos mostrar es que

$$R_p(f) + R_p(f - r) = \frac{1}{r} \qquad 0 \geq f \geq r.$$

Como $r_p(t)$ es real, sabemos que $P_p(f)$ es real y simétrico, por lo tanto la condición que buscamos se transforma en

$$r_p(nT) = \delta[n] \qquad \text{si y sólo si} \qquad R_p(r - f) = T - R_p(f)$$

lo que implica que $R_p(f)$ tiene simetría vestigial con respecto a $f = \frac{r}{2}$ donde toma el valor $R_p\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{T}{2}$.