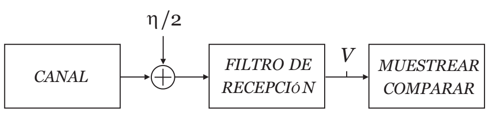
# Comunicaciones Digitales

## Práctico 2
*Desempeño de sistemas digitales binarios bandabase*

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil.

### ✦ Ejercicio 1

Se trasmite una señal binaria que toma valores 0 y $A$ correspondientes a 0 y 1 lógicos en forma equiprobable e independiente de los valores anteriores por un canal con ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral $\eta/2$. El receptor se esquematiza en la siguiente figura.




El filtro de recepción es un pasabajos ideal de ancho de banda $B_T$. Se supone que **no modifica los pulsos**, su finalidad es limitar el ruido.

(a) Si llamamos $y$ a la señal a la entrada del comparador, hallar y graficar las probabilidades $p_Y(y|0)$, probabilidad de la señal $y$ cuando se trasmitió un 0 lógico. Ídem con $p_Y(y|1)$ para el 1 lógico.

(b) Especificar los momentos estadísticos de interés.

(c) Dar el umbral de decisión y hallar la probabilidad de error.

### ★ Ejercicio 2

Sea un sistema de transmisión bandabase, binario y unipolar, donde los dígitos son equiprobables y se representan con los niveles $2A$ y 0, con un umbral de decisión $A$. Se utilizan pulsos cuadrados. El mensaje se transmite por un canal de atenuación $L$ y se recibe con un receptor implementado con un filtro pasabajos, que agrega ruido de densidad espectral de potencia $\frac{\eta}{2}$.

(a) Realice un diagrama de bloques del sistema completo.

(b) Demuestre que la probabilidad de error de símbolo en recepción vale $P_e = Q(\sqrt{\frac{1}{2}SNR_R})$

(c) ¿Cómo quedaría la probabilidad de error de símbolo si el sistema fuera polar y con umbral de decisión en 0?

Ahora se desea recibir la señal con un pulso apareado.

(d) Realice un diagrama de bloques del nuevo sistema.

(e) Calcule las probabilidades de error de símbolo tanto para el caso polar como unipolar.

(f) Discuta todos los resultados anteriores.

## ⋆ Ejercicio 3

Halle, para cada uno de los cuatros casos del ejercicio anterior, la potencia mínima requerida en tramsisión de manera de lograr una probabilidad de error menor o igual a $P_e = 0.001$. Compare los resultados.

## ✶ Ejercicio 4

Se considera la transmisión de una señal binaria $x[k]$. Para transmitirla se utilizan pulsos $p(t)$ de duración $T$ y forma sinusoidal:

$$p(t) = A\left[1 + cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right] \qquad\qquad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

Los *unos* tiene probabilidad $\frac{2}{3}$ y se codificarán como $p(t)$; los *ceros* tienen probabilidad $\frac{1}{3}$ y se codificarán como $-p(t)$. Llamaremos $y(t)$ a esta señal conformada. El ruido que afecta a la señal recibida, $n(t)$, se podrá considerar blanco, gaussiano y aditivo, su densidad espectral de potencia será constante e igual a $\eta/2$. Para detectar los bits transmitidos utilizaremos un receptor óptimo.

(a) Dibujar un diagrama de bloques del receptor.

(b) Calcular los valores que toma la componente de señal $y'[k]$ y caracterizar la componente de ruido, $n'[k]$; siendo estas componentes las de la entrada al comparador.

(c) Calcular la probabilidad de error en la secuencia detectada, $P_e$, en función de las características de $p(t)$, de la potencia del ruido $\sigma^2$, y del umbral V.

(d) Calcule el valor óptimo (el que minimiza $P_e$) para el umbral V.

## ✶ Ejercicio 5

En un sistema de comunicación digital binario polar se transmite $s_i(t)$ con amplitudes 1 y $-1$ con pulsos rectangulares de ancho $T$ equiprobables. El canal introduce ruido AWGN con densidad espectral de potencia $\eta/2$, siendo $\eta = 10^{-3}$ W/Hz. Si se recibe con un receptor de correlación, determinar la máxima tasa de transmisión que se puede alcanzar con una probabilidad de error $P_e \leq 10^{-3}$.

## ✷ Ejercicio 6

Se transmite información binaria por un canal, enviando durante un tiempo $T$, una amplitud nula si el bit es 0, o una amplitud $A\sqrt{L}$ si el bit es 1. Los bits son equiprobables e independientes entre sí. El canal tiene una atenuación en potencia $L$. El receptor introduce ruido aditivo, blanco y gaussiano (AWGN), con densidad espectral de potencia $\eta/2$. El filtro de recepción es un pasabajos ideal de ancho de banda $B = 1/T$ (que se supondrá que no modifica los pulsos) y $V$ es el umbral de decisión.

(a) Calcular la potencia de la señal recibida y la potencia de ruido previo al muestreador.

(b) Hallar el umbral óptimo de decisión y la probabilidad de error resultante.

Ahora se modifica el protocolo de transmisión de bits, sin modificar el sistema de transmisión-recepción. Cada bit se envía 3 veces y el receptor decide por mayoría. Por ejemplo, si se desea enviar un '1' se transmite '111', si se recibe (con error) '011', por mayoría, se decide por '1'.

(c) Calcular la nueva probabilidad de error por bit.

## ✷ Ejercicio 7

Un sistema de comunicación binario utiliza las señales equiprobables $s_0(t)$ para trasmitir 0 y $s_1(t)$ para trasmitir 1. Las señales se definen como:

$$s_0(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & otro\ \ caso \end{cases} \qquad s_1(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq aT_b \\ 0 & otro\ \ caso \end{cases}$$

Donde $0 \leq a \leq 1$. El canal cumple con las hipótesis usuales agregando ruido AWGN con densidad espectral de potencia (DEP) $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$.

(a) Determinar la energía de bit ($E_b$).

(b) Determinar la energía de la diferencia de los pulsos ($E_d$).

(c) Dar el diagrama del receptor si se utiliza un filtro apareado, especificando todos sus parámetros y explicar su funcionamiento. Bosquejar la salida del filtro apareado cuando se recibe la cadena binaria 101.

(d) Calcular la probabilidad de error en función $\frac{E_b}{\eta}$ y $a$ si el umbral es óptimo, no se presenta interferencia intersimbólica y se utiliza el filtro diseñado en la sección anterior.

(e) Se quiere que la probabilidad de error $Pe$ no sea superior a $10^{-5}$. Calcular los valores posibles de $a$ de manera que $\frac{E_b}{\eta}$ sea 16dB.

Se quiere evaluar como es afectada la probabilidad de error ($P_e$) cuando se utiliza la modulación anterior con decodificación de errores y borrado. En lugar de hacer la decisión a favor de un símbolo podemos declarar borrado para algunos valores de detección. Asuma que los símbolos son equiprobables y que el ancho de la zona de borrado es $2m$, centrado en el umbral óptimo $V_T$.

(f) Hallar las expresiones para $P_e$ y la $P_{\text{bor}}$ (probabilidad de borrado) como una función de $a$ y $m$.

(g) Determinar el valor de $m$ para que se cumpla que $P_{\text{bor}} = 2P_e$, suponiendo que $P_e = 10^{-5}$.

# Solución

## Ejercicio 1

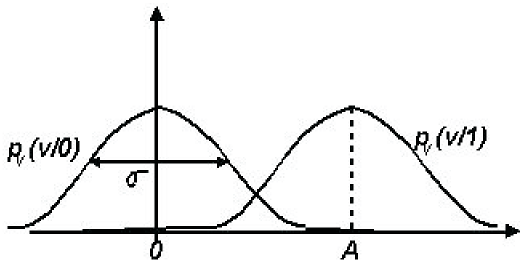
**(a)** A la entrada del comparador, la señal $y$ es de la forma $y[k] = x[k] + n[k]$, donde $x$ es la señal que se envió, y $n$ representa el ruido.

Por lo tanto, si se transmitió un 0, se tiene que $y[k] = n[k]$ y si se transmitió un 1, $y[k] = A + n[k]$.

Se ve que si no hubiera ruido, la densidad de probabilidad de $y$ serían dos deltas, una en 0 y otra en $A$, pero como hay presencia de ruido blanco gaussiano, lo que se tiene en realidad es de la forma:

$$\begin{aligned} p_Y(y|0) = &\quad p_N(y) &= \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ p_Y(y|1) = &\quad p_N(y-A) &= \mathcal{N}(A, \sigma^2) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la figura siguiente.




**(b)** Los momentos estadísticos de interés son la media de las gaussianas, y su varianza.

La primera está dada por el valor en el cual se centran las curvas: las medias son 0 y $A$.

La segunda está relacionada con el "ancho" de las mismas: ambas tienen varianza $\sigma^2 = S_N = B_T \eta$, ya que la media del ruido es cero.

**(c)** Sea $V$ el umbral óptimo de decisión. Entonces:

$$P_e = \underbrace{P_0}_{=\frac{1}{2}} .P_{e0} + \underbrace{P_1}_{=\frac{1}{2}} .P_{e1}$$

donde

$$\begin{aligned} P_{e0} &= \int_V^{+\infty} p_Y(y|0)dy = \int_V^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\sigma})^2} dy = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right), \\ P_{e1} &= \int_{-\infty}^{V} p_Y(y|1)dy = \int_{-\infty}^{V} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-A}{\sigma})^2} dy = Q\left(\frac{A-V}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Buscamos $V_{opt}$ tal que

$$\left.\frac{\partial P_e}{\partial V}\right|_{V_{opt}} = 0$$

La regla de Leibniz para diferenciar las integrales nos permite llegar al siguiente resultado:

$$\frac{\partial P_e}{\partial V} = -P_0 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V}{\sigma}\right)^2} + P_1 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V-A}{\sigma}\right)^2},$$

que si lo igualamos a cero nos da:

$$P_0 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_{opt}}{\sigma}\right)^2} = P_1 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_{opt}-A}{\sigma}\right)^2}$$

.

Como $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$ es posible concluir que

$$V_{opt} = \frac{A}{2},$$

y por lo tanto:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right).$$

## Ejercicio 2

**(a)** En la figura 1 se muestra un diagrama de bloques del sistema completo.

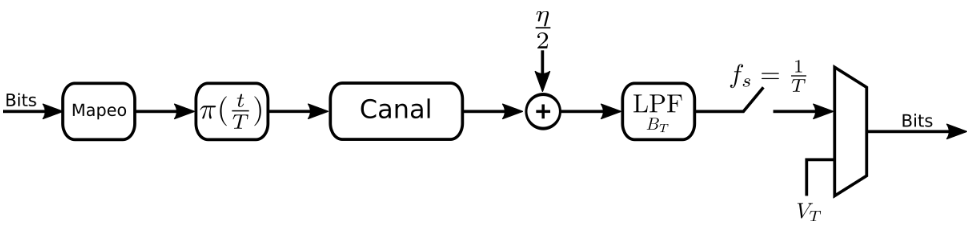



Figura 1: Diagrama de bloques de un sistema digital binario bandabase completo, implementado con un filtro pasabajos.

**(b)** Es sencillo ver que la probabilidad de error de símbolo vale

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sqrt{L}\sigma}\right),$$

con $\sigma$ la desviación estándar del ruido gaussiano.

Podemos trabajar un poco el resultado anterior tomando en cuenta que la energía de símbolo vale

$$E_s = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (2A)^2 dt = 2A^2 T,$$

por lo que la potencia transmitida será esta energía dividida la duración del símbolo T:

$$S_T = 2A^2,$$

y la potencia recibida será el resultado anterior atenuado por los efectos del canal:

$$S_R = \frac{2A^2}{L}.$$

Por otro lado, la potencia del ruido no es otra cosa que su densidad espectral de potencia integrada $\pm B_T$, el ancho de banda del filtro pasabajos:

$$S_N = \frac{2B_T\eta}{2} = B_T\eta = \sigma^2,$$

donde la igualdad de la derecha se da por tener media cero.
Finalmente, podemos reescibir $P_e$ de la siguiente manera:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}\frac{S_R}{S_N}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}SNR_R}\right).$$

**(c)** La probabilidad de error de símbolo seguiría siendo la misma,

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sqrt{L}\sigma}\right),$$

pero la energía de símbolo cambiaría, pues valdría

$$E_s = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{s}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt + \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{s}}^{\frac{T}{2}} (-A)^2 dt = A^2 T.$$

Podemos entonces calcular la potencia recibida

$$S_R = \frac{A^2}{L},$$

y sabemos que la potencia del ruido seguiría siendo la misma:

$$S_N = \frac{2B_T\eta}{2} = B_T\eta = \sigma^2.$$

Finalmente, podemos reescribir la probabilidad de error de símbolo según:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{S_R}{S_N}}\right) = Q\left(\sqrt{SNR_R}\right).$$

**(d)** En la figura 2 se muestra un diagrama de bloques del sistema completo.

**(e)** Primero planteamos la probabilidad de error de símbolo,

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sqrt{L}\sigma}\right).$$

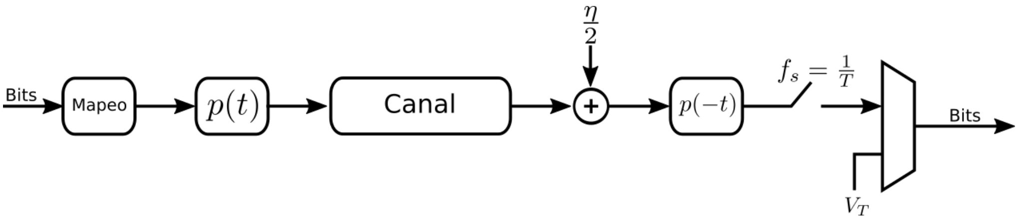



Figura 2: Diagrama de bloques de un sistema digital binario bandabase completo, implementado con un filtro apareado.

Luego podemos calcular la energía de símbolo (en recepción) para el caso unipolar

$$E_s^u = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2A)^2}{L} p(t)^2 dt = \frac{2A^2}{L},$$

y para el caso polar

$$E_s^p = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{L} p(t)^2 dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-A)^2}{L} p(t)^2 dt = \frac{A^2}{L}.$$

En ambos casos estamos asumiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} p(t)^2 dt = 1$.
Para calcular la potencia del ruido en recepción podemos primero plantear su densidad espectral de potencia como

$$G_N(f) = |P(f)|^2 \frac{\eta}{2},$$

ya que se trata de un proceso estocástico filtrado por el pulso $p(t)$. Luego podemos calcular su potencia media al integrar en todo el espectro:

$$S_N = \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 \frac{\eta}{2} df = \frac{\eta}{2} = \sigma^2,$$

donde la igualdad de la derecha se da por tener media cero.
Finalmente, podemos reescribir la probabilidad de error para los casos unipolar y polar según

$$P_e^u = Q\left(\sqrt{\frac{E_s^u}{\eta}}\right),$$

y

$$P_e^p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s^p}{\eta}}\right)$$

respectivamente.

## Ejercicio 3

<u>Pulso cuadrado, caso unipolar</u>: en el problema anterior concluimos que

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{S_T}{2LB_T\eta}}\right) \leq 0.001,$$

por lo que despejando podemos obtener el siguiente resultado:

$$S_T \geq 2LB_T\eta \left[Q^{-1}(0.001)\right]^2.$$

Pulso cuadrado, caso polar: en el problema anterior concluimos que

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{S_T}{LB_T\eta}}\right) \leq 0.001,$$

por lo que despejando podemos obtener el siguiente resultado:

$$S_T \geq LB_T\eta \left[Q^{-1}(0.001)\right]^2.$$

Pulso apareado, caso unipolar: en el problema anterior concluimos que

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{S_T}{r_s L\eta}}\right) \leq 0.001,$$

por lo que despejando podemos obtener el siguiente resultado:

$$S_T \geq r_s L\eta \left[Q^{-1}(0.001)\right]^2.$$

Pulso apareado, caso polar: en el problema anterior concluimos que

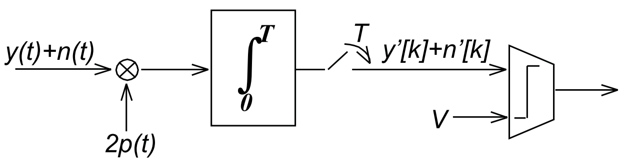
$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2S_T}{LB_T\eta}}\right) \leq 0.001,$$

por lo que despejando podemos obtener el siguiente resultado:

$$S_T \geq \frac{LB_T\eta}{2} \left[Q^{-1}(0.001)\right]^2.$$

## Ejercicio 4

**(a)** El receptor óptimo en este caso es el receptor de correlación. Su diagrama de bloques se muestra en la siguiente figura.




**(b)**

$$y'[T] = \int_0^T 2y(t)p(t)dt$$

$y(t)$ es diferente si transmití 0 que si transmití 1. Por lo tanto, planteamos el valor de $y'[T]$ en cada caso:

- Si transmití 1, $y(t) = p(t)$, por lo que:

$$\begin{aligned}
y'[T] &= 2\int_0^T p^2(t)dt \\
&= 2\int_0^T A^2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]^2 dt \\
&= 2A^2 \int_0^T \left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right] dt \\
&= 2A^2\left(T + \frac{T}{2}\right) \\
&= 3A^2T.
\end{aligned}$$

- Si transmití 0, $y(t) = -p(t)$, por lo que:

$$y'[T] = -3A^2T.$$

En cuanto a la componente de ruido, como sabemos que éste será gaussiano, debemos calcular su media y su varianza para caracterizarlo completamente:

$$\begin{aligned}
m_{n'} &= \mathbb{E}\left\{\int_0^T 2n(t)p(t)dt\right\} \\
&= 2\int_0^T \underbrace{\mathbb{E}\{n(t)\}}_{=0} \mathbb{E}\{p(t)\}\, dt \\
&= 0. \\
\sigma^2_{n'} &= \mathbb{E}\left\{\left(\int_0^T 2n(t)p(t)dt\right)^2\right\} \\
&= 4\mathbb{E}\left\{\int_0^T p(v)n(v)dv \int_0^T p(u)n(u)du\right\} \\
&= 4\int\int_0^T p(u)p(v)\mathbb{E}\{n(u)n(v)\}\, dudv \\
&= 4\int\int_0^T p(u)p(v)R_n(u-v)dudv \\
&= 4\int_0^T p(u)\left(\int_0^T p(v)R_n(u-v)dv\right) du \\
&= 4\int_0^T p(u)(p * R_n)(u)du
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$(p * R_n)(u) = \mathcal{F}^{-1}[P(f)G_n(f)] = \mathcal{F}^{-1}[P(f)\frac{\eta}{2}] = \frac{\eta}{2}p(u)$$

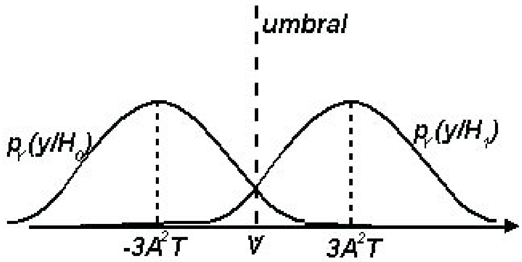
Entonces:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{n'} &= 4\int_0^T p(u)\frac{\eta}{2}p(u)du \\ &= 4\frac{\eta}{2}\int_0^T p^2(u)du \\ &= 4\frac{\eta}{2}\frac{3}{2}A^2T \\ &= 3\eta A^2 T.\end{aligned}$$

**(c)** La probabilidad de error en detección, $P_e$, es igual a:

$$P_e = P_0.P_{e0} + P_1.P_{e1} = \frac{1}{3}.P_{e0} + \frac{2}{3}.P_{e1}$$

Los valores de $P_{e0}$ y $P_{e1}$ dependen de la forma de $p_Y(y/H_0)$ y $p_Y(y|H_1)$, que se muestran en la siguiente figura.




Como ambas son gaussianas, en definitiva se tiene que:

$$P_e = \frac{1}{3}Q\left(\frac{V+3A^2T}{\sigma}\right) + \frac{2}{3}Q\left(\frac{3A^2T-V}{\sigma}\right)$$

**(d)** Básandonos en los cálculos del ejercicio 1 tenemos que:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_{opt}+3A^2T}{\sigma}\right)^2} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_{opt}-3A^2T}{\sigma}\right)^2},$$

y trabajando un poco el resultado anterior llegamos a que

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{12A^2TV_{opt}}{3\eta A^2T}\right)} = e^{-\left(\frac{2TV_{opt}}{\eta}\right)} = 2.$$

Finalmente, tomando logaritmo de ambos lados de la igualdad y despejando:

$$V_{opt} = -\frac{\eta}{2}\ln(2).$$

## Ejercicio 5

Basándonos en los cálculos del ejercicio anterior, tenemos que la componente de la señal recibida en el instante T es $r = 2\int_0^T s_i(t)p(t)dt$. Entonces $\hat{a_1} = 2T$ y $\hat{a_0} = -2T$.
El ruido recibido $\hat{n} = 2\int_0^T n(t)p(t)dt$ es gaussiano de media nula y varianza $\sigma^2 = 2\eta T$.
Al ser bits equiprobables la probabilidad de error es:

$$Pe = Q\left(\frac{\hat{a_1} - \hat{a_0}}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{4T}{2\sqrt{2\eta T}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2T}{\eta}}\right)$$

Con $Pe \leq 10^{-3}$, $\sqrt{\frac{2T}{\eta}} \geq 3 \Rightarrow$ Tasa de transmisión $\frac{1}{T} \leq \frac{2}{9}10^3$.

## Ejercicio 6

**(a)**

$$S_T = E\{x^2(t)\} = A^2 Lp(1) + 0\ p(0)$$

Como son equiprobables

$$S_T = \frac{A^2 L}{2}$$

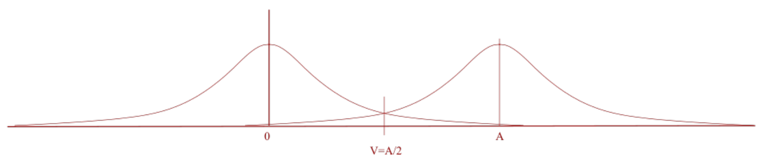
por lo que la señal recibida es

$$S_R = S_T/L = \frac{A^2}{2}$$

Para hallar la potencia de ruido previo al muestreador ($\sigma^2$), debemos considerar el ruido introducido (AWGN con DEP $\eta/2$) y el ancho de banda del filtro de recepción ($B = 1/T$).
De esta forma, llegamos a que la potencia de ruido queda:

$$\sigma^2 = \frac{\eta}{T}$$

**(b)** Si no hubiera ruido en el canal y en la hipótesis que el filtro de recepción no deforma los pulsos enviados, tendríamos en el instante de muestreo $A$ o 0 según el bit enviado fuera 1 o 0. La siguiente figura muestra la distribución de probabilidades en el instante de muestreo:




Como ambos valores son equiprobables el umbral de decisión óptimo es en el punto medio, por lo tanto

$$V_o = \frac{A}{2}$$

y la probabilidad de error es la suma de las dos colas de las gaussianas

$$P_e = p(0) \cdot \mathrm{Q}\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + p(1) \cdot \mathrm{Q}\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{A}{2\sigma}\right).$$

De la parte anterior, tenemos que:

$$\sigma^2 = \frac{\eta}{T}.$$

Finalmente:

$$P_e = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{A^2T}{4\eta}}\right).$$

**(c)** En esta forma de usar el sistema hay error en el bit si hubo error en la recepción de 2 o 3 símbolos.

$$P_{e_{\text{total}}} = 3P_e^2(1-P_e) + P_e^3$$
$$P_{e_{\text{total}}} = 3P_e^2 - 2P_e^3$$

## Ejercicio 7

**(a)** Por ser equiprobables:

$$E_b = \frac{1}{2}(E_0 + E_1) = \frac{1}{2}(\int_0^{T_b} A^2 dt + \int_0^{aT_b} A^2 dt)$$
$$E_b = \frac{A^2T_b}{2}(1+a)$$

**(b)** La diferencia de pulsos:

$$d(t) = s_1(t) - s_0(t)$$

La energía de la diferencia de pulsos

$$E_d = \int_{-\infty}^{\infty} d^2(t)dt$$
$$= \int_0^{T_b} (s_0^2(t) - 2s_0^2(t)s_1(t) + s_1^2(t))dt$$
$$= \int_0^{T_b} A^2dt - 2\int_0^{aT_b} A^2dt + \int_0^{aT_b} A^2dt$$
$$E_d = A^2T_b(1-a)$$

**(c)**

$$h(t) = k(d(T_b - t)) = k(s_1(T_b - t) - s_0(T_b - t))$$

eligiendo $k = 1/(A^2T_b)$ por conveniencia.

$$h(t) = \begin{cases} A & 0 \le t \le (1-a)T_b \\ 0 & otro \;\; caso \end{cases}$$

Instante de muestreo óptimo: $T_b$

Umbral de decisión: $V_T = \frac{\hat{a_1} - \hat{a_0}}{2}$

Con $\hat{a_1} = s_1(t) * h(t)|_{T_b}$
$\hat{a_0} = s_0(t) * h(t)|_{T_b}$

**(d)**

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right)$$

$$E_b = \frac{A^2 T_b}{2}(1+a) \quad \text{y} \quad E_d = A^2 T_b (1-a)$$

Entonces,

$$E_d = 2E_b \frac{(1-a)}{(1+a)}$$

Por lo tanto,

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b \frac{(1-a)}{(1+a)}}{\eta}}\right)$$

**(e)**

$$P_e \leq 10^{-5}$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{E_b \frac{(1-a)}{(1+a)}}{\eta}}\right) \leq 10^{-5}$$

$$\left(\sqrt{\frac{E_b \frac{(1-a)}{(1+a)}}{\eta}}\right) \geq 4.3$$

$$a \leq 0.37$$

**(f)**

$$P_e = P_0 \int_{-\infty}^{V_T - m} p_N(y - \hat{a_0}) + P_1 \int_{V_T + m}^{\infty} p_N(y - \hat{a_1})$$

$$P_{borr} = 1 - P_{correcto} - P_e$$

con

$$\hat{a_1} = 0$$

$$\hat{a_0} = 1 - a$$

$$V_T = \frac{1-a}{2}$$

$$P_e = P_0 \int_{-\infty}^{V_T - m} p_N(y - \hat{a_0}) + P_1 \int_{V_T + m}^{\infty} p_N(y - \hat{a_1})$$

$$P_{borr} = 1 - P_{correcto} - P_e$$

$$P_{corr} = P_1 \int_{-\infty}^{V_T - m} p_N(y - \hat{a_1}) + P_0 \int_{V_T + m}^{\infty} p_N(y - \hat{a_0})$$

$$P_e = Q\left(\frac{1/2 - a/2 + m}{\sigma}\right)$$

$$P_{corr} = 1 - Q\left(\frac{1/2 - a/2 - m}{\sigma}\right)$$

$$P_{borr} = Q\left(\frac{1/2 - a/2 - m}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{1/2 - a/2 + m}{\sigma}\right)$$

**(g)**

$$P_e = 10^{-5} \Rightarrow \frac{1/2 - a/2 + m}{\sigma} = Q^{-1}\left(10^{-5}\right) = 4.3$$

$$P_{\text{borr}} = 2P_e = 2.10^{-5} \Rightarrow \left(\frac{1/2 - a/2 - m}{\sigma}\right) = Q^{-1}\left(3.P_e\right) = 3.9$$

$$\Rightarrow \frac{1/2 - a/2 - m}{1/2 - a/2 + m} = \frac{3.9}{4.3} \Rightarrow m = 0.015$$