Teoría de Lenguajes

AFD
AFND

Expresiones Regulares

Notación formal para definir lenguajes (conjuntos) sobre un alfabeto Σ

- $\emptyset$ es una ER que describe al conjunto $\emptyset$
- **a** es una ER $\forall a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- Si r y s son ER para describir R y S respectivamente entonces:
    - r|s es una ER para $R \cup S$, *unión*
    - r.s es una ER para R.S, *concatenación*
    - r* es una ER para R*, *clausura de Kleene*

Estas son todas las Expresiones Regulares definidas sobre Σ

Lenguajes Regulares

Definición (1):

Un lenguaje ***L*** es **Regular** si existe una expresión regular *r* que lo describe, es decir, ***L*** = L(***r***)

Ver algunos ejemplos….

Autómatas Finitos

Autómata Finito Determinista

Un AFD es una máquina de estados que se puede representar por la siguiente quíntupla

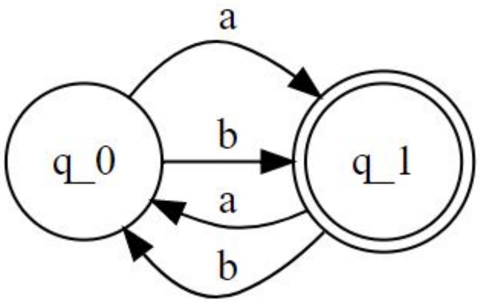
$$M : (Q, \Sigma, \delta, q_o, F) \text{ donde:}$$

- Q: conjunto de estados
- Σ: alfabeto
- δ: función de transición / $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$
- q_o: estado inicial / $q_o \in Q$
- F: conjunto de estados finales (aceptores) / $F \subseteq Q$

Autómata Finito Determinista

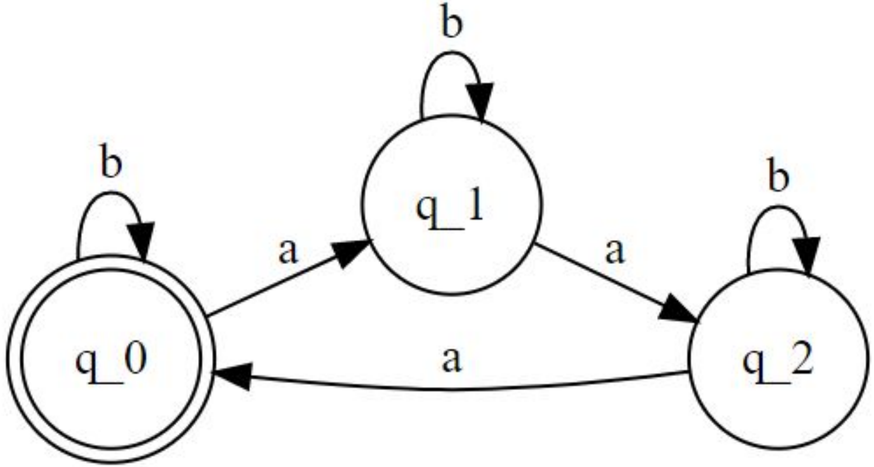
Ejemplos dado {a,b}

1) Lenguaje de tiras con cantidad impar de símbolos



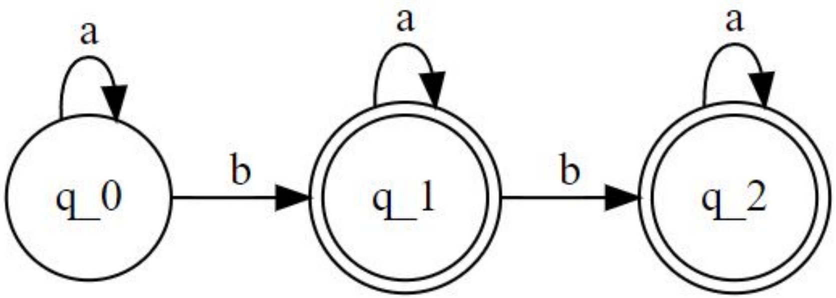
Autómata Finito Determinista

2) Lenguaje de tiras con cantidad de **a**’s múltiplo de 3



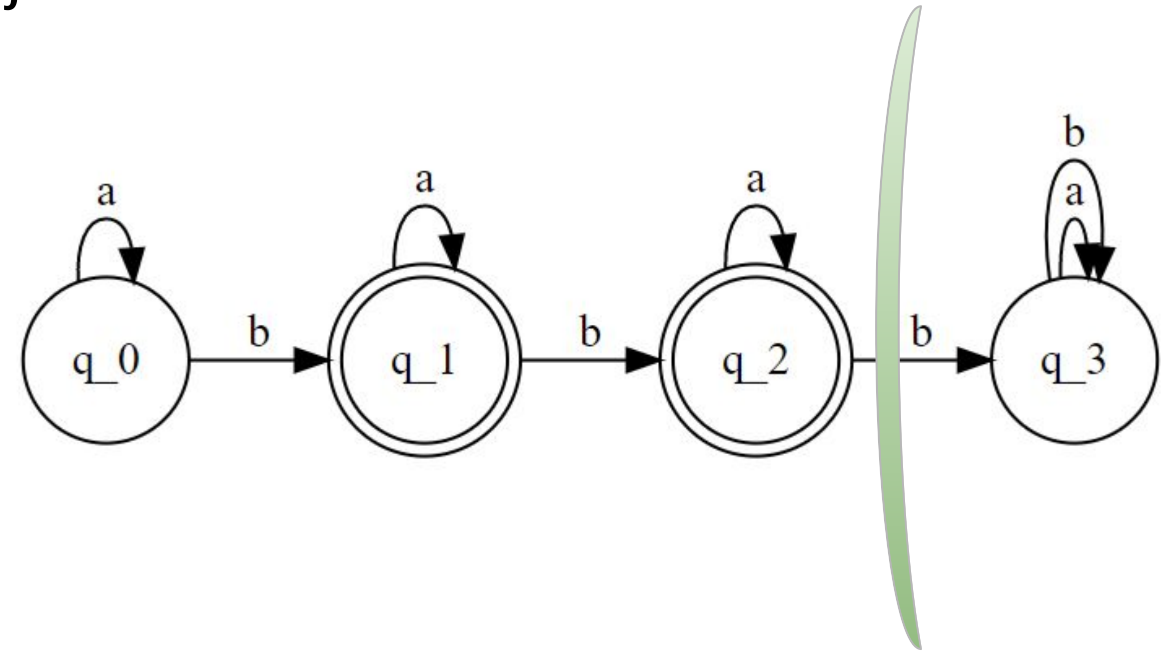
Autómata Finito Determinista

3) Lenguaje con exactamente una o dos **b**’s



Autómata Finito Determinista

3) Lenguaje con exactamente una o dos **b**’s



Autómata Finito Determinista

Extensión para manejar strings

$\delta^\wedge : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$

$\delta^\wedge(q,\varepsilon) = q \quad \forall\, q \in Q$

$\delta^\wedge(q,wa) = \delta(\delta^\wedge(q,w),a) \quad \forall\, q \in Q \quad a \in \Sigma \quad w \in \Sigma^*$

Basado en la definición inductiva de Σ^*

$\varepsilon \in \Sigma^*$

si $a \in \Sigma,\ w \in \Sigma^*$ entonces $wa \in \Sigma^*$

Autómata Finito Determinista

Definición:

Lenguaje ***L*** aceptado por un AFD M : $(Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$

$$\boldsymbol{L} = L(M) = \{ x \in \Sigma^* \ / \ \delta^\wedge(q_0, x) \in F \}$$

Lenguaje Regular

Definición (2):

Un lenguaje $\boldsymbol{L}$ es Regular si es aceptado por un AFD $M : (Q,\Sigma,\delta,q_o,F)$

otra forma

Un lenguaje $\boldsymbol{L}$ es Regular si existe un AFD $M : (Q,\Sigma,\delta,q_o,F)$ que lo reconoce

$$\boldsymbol{L} = L(M)$$

Lenguaje Regular

¿El lenguaje de las tiras de a's y b's / el 3er símbolo de la derecha (desde el final de las tiras) es una **b**, es regular?

$(a|b)^* \, b \, (a|b) \, (a|b)$

Entonces es Regular

¿Cómo sería un AFD?

Autómata Finito No Determinista

Un AFND es una máquina de estados que se puede representar por la siguiente quíntupla

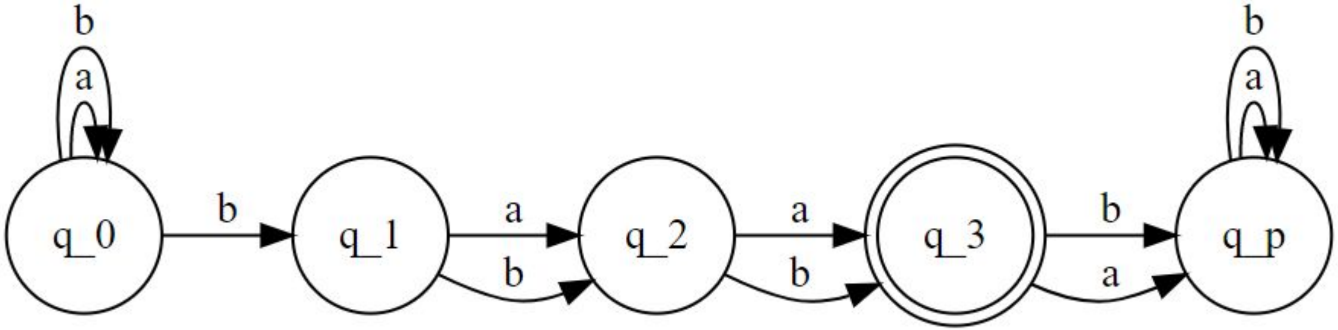
$$M : (Q, \Sigma, \delta, q_o, F) \text{ donde:}$$

- Q: conjunto de estados
- Σ: alfabeto
- δ: función de transición / $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$
- q_o: estado inicial / $q_o \in Q$
- F: conjunto de estados finales (aceptores) / $F \subseteq Q$

Autómata Finito No Determinista

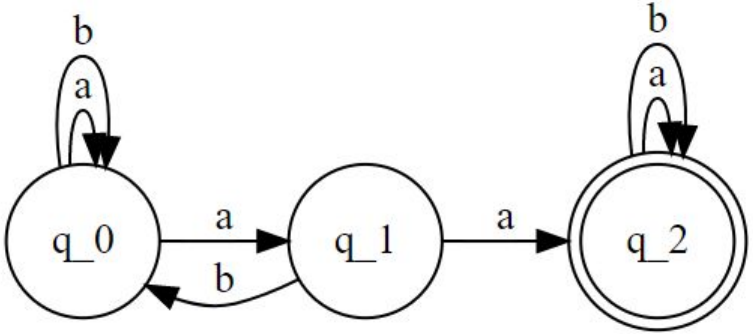
Ejemplos dado {a,b}

1) El lenguaje tal que el 3er símbolo de la derecha es una **b**



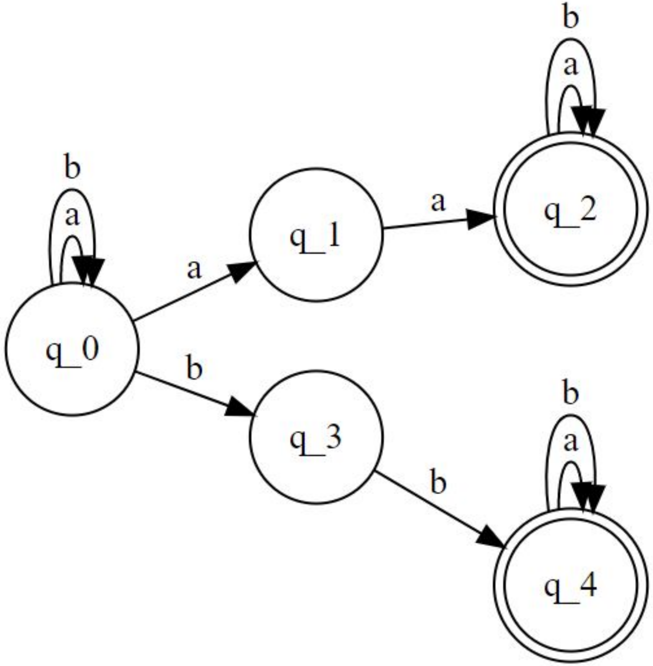
Autómata Finito No Determinista

2) El lenguaje de las tiras con al menos dos **a**’s consecutivas



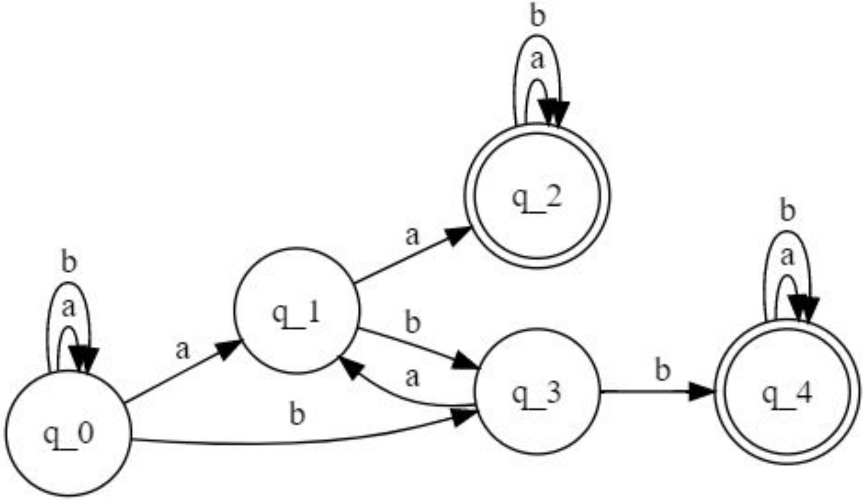
Autómata Finito No Determinista

3) El lenguaje de las tiras con al menos dos **a**'s o dos **b**'s consecutivas



Autómata Finito No Determinista

3) El lenguaje de las tiras con al menos
dos **a**’s o dos **b**’s consecutivas
(con δ total)



Autómata Finito No Determinista

Extensión para manejar strings

$\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

Necesito manejar la función δ con conjuntos de estados...

$\tilde{\delta}: 2^Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

$\tilde{\delta}(P,a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q,a) \quad P \subseteq Q$

de donde

$\hat{\delta}(q,\varepsilon) = \{q\} \quad \forall\, q \in Q$

$\hat{\delta}(q,wa) = \tilde{\delta}\big(\hat{\delta}(q,w),a) \quad \forall\, q \in Q \quad a \in \Sigma \quad w \in \Sigma^*$

Autómata Finito No Determinista

Definición:

Lenguaje $\boldsymbol{L}$ aceptado por un AFND $M : (Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$

$$\boldsymbol{L} = L(M) = \{\, x \in \Sigma^* \;/\; \delta^\wedge(q_0, x) \cap F \neq \varnothing \,\}$$

Lenguaje Regular

Definición (3):

Un Lenguaje ***L*** es Regular si es aceptado por un AFND $M : (Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$

otra forma

Un Lenguaje ***L*** es Regular si existe un AFND $M : (Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$ que lo reconoce

$$\boldsymbol{L} = L(M)$$

Equivalencia de AFD y AFND

1) AFD $\Rightarrow$ AFND

2) AFND $\Rightarrow$ AFD :: $M : (Q, \Sigma, \delta, q_o, F) \Rightarrow M' : (Q', \Sigma, \delta', q'_o, F')$

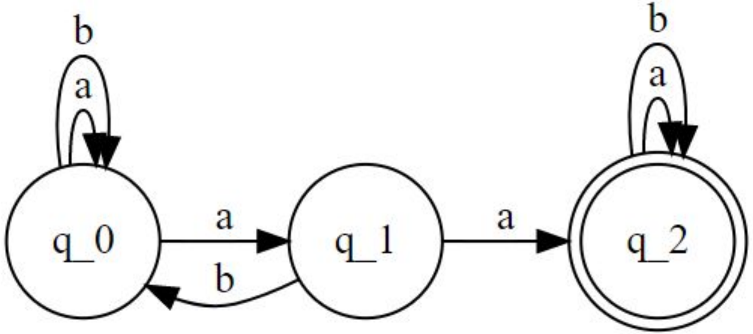
Algoritmo:

- $Q' \subseteq 2^Q$ cada estado en Q' está asociado a subconjuntos de Q
- $q_0' = \{q_0\}$ :: $[q_0]$
- $F' \subseteq Q'$ asociados a subconjuntos de Q que contienen algún $q \in F$
- $\delta'([q_i \ldots q_t], a) = [q_j \ldots q_r] \Leftrightarrow \delta^{\sim}(\{q_i \ldots q_t\}, a) = \{q_j, .., q_r\}$

Entonces $\delta'^{\wedge}([q_0], x) \in F' \Leftrightarrow \delta^{\wedge}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing$

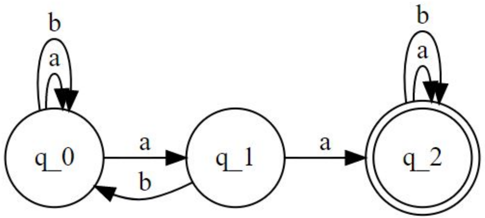
Aplicación

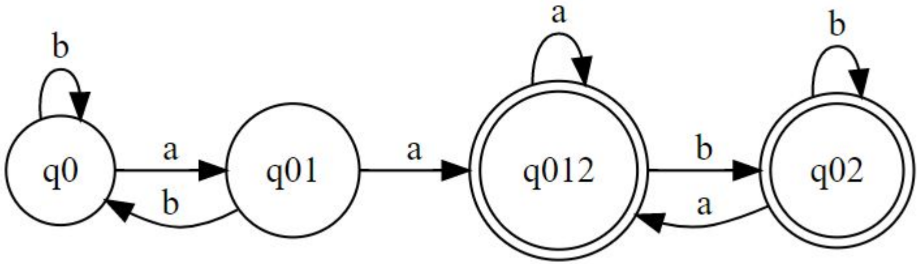
El lenguaje de las tiras con al menos dos **a**'s consecutivas



Aplicación (cont.)

El lenguaje de las tiras con al menos dos **a**'s consecutivas

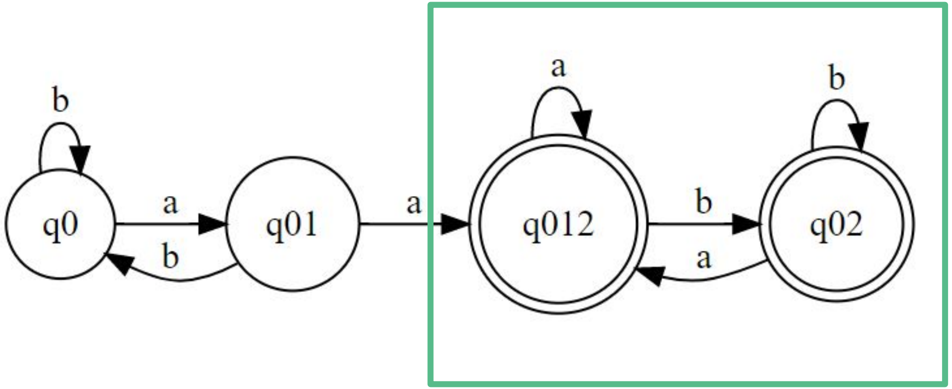




δ'	a	b
[q0]	[q01]	[q0]
[q01]	[q012]	[q0]
[q012]	[q012]	[q02]
[q02]	[q012]	[q02]

Aplicación (cont.)

El lenguaje de las tiras con al menos dos **a**’s consecutivas



intuitivamente...