Demostración de que $L(a(ba)^*) = L((ab)^*a)$

Teoría de Lenguajes

2021

1 Introducción

Se quiere probar que los lenguajes generados por ambas expresiones regulares son equivalentes sobre $\Sigma = \{a, b\}$. Por tanto, probaremos la doble inclusión.

1.1 $L(a(ba)^*) \subseteq L((ab)^*a)$

Lo primero importante a observar es que - como la Clausura de Kleene es una unión infinita de potencias de un lenguaje- una tira dada del conjunto pertenecerá a al menos una de esas potencias y por lo tanto se podrá escribir como la concatenación de una cierta cantidad (finita) de tiras de L.

Formalmente: $x \in L(a(ba)^*) \overset{def.L}{=} L(a).L((ba)^*) \overset{def.L}{=} L(a).L(ba)^*$. Por definición de potencia, $L(ba)^* \overset{def.}{=} \bigcup_{i \geq 0} L(ba)^i$. El índice k será entonces uno de los posibles i de esa definición. Es decir: $\forall x \in L(a(ba)^*) \exists k \in \mathbb{N} : x = a.(ba)^k$

La prueba la haremos por inducción en el **índice k de la potencia** para una tira genérica $x \in L(a(ba)^*)$

1.1.1 Paso base (k=0)

$x = a.(ba)^0 \overset{def.pot.leng.}{=} a.\epsilon \overset{neutro}{=} \epsilon.a \in L(a)$.

Como $\epsilon \in L(ab)^0 \subseteq L(ab)^*$ y $a \in L(a) \overset{def.L}{\Longrightarrow} \epsilon.a \in L(ab)^*.L(a) \overset{def.L}{=} L((ab)^*.a)$

1.1.2 Paso inductivo

- **HI:** $a(ba)^k \in L((ab)^*a)$
- **TI:** $a(ba)^{k+1} \in L((ab)^*a)$

Sea $x = a(ba)^{k+1} : x \in L(a(ba)^*) \Longrightarrow x = a(ba)^{k+1} \overset{def.pot.leng}{=} a(ba)^k.(ba) = z.(ba)$

Observemos que la subtira z cumple la hipótesis inductiva, por lo que podemos escribirla como $z = (ab)^k a$.
Ahora usaremos la **asociatividad de la concatenación**: $(u.v).w = u.(v.w)$.

Reescribimos: $x = z.(ba) \overset{H.I.}{=} ((ab)^k.a).(ba) \overset{asociativa}{=} (((ab)^k.a)b)a \overset{asociativa}{=} ((ab)^k.(ab))a \overset{def.pot.leng.}{=} ((ab)^{k+1})a$

Como $(ab)^{k+1} \in L(ab)^*$ y $a \in L(a) \overset{def.L}{\Longrightarrow} (ab)^{k+1}.a \in L(ab)^*.L(a) \overset{def.L}{=} L((ab)^*.a)$

con lo cual queda finalizada la demostración de que $L(a(ba)^*) \subseteq L((ab)^*a)$.

1.2 $L((ab)^*a) \subseteq L(a(ba)^*)$

Es análoga.