Matemática discreta 1 — Teórico vespertino (Florencia)
IMERL — 2021

Resumen teórico semana 9
Conceptos básicos de teoría de grafos

Este material resume algunos contenidos del capítulo 11 y 12 del libro "Matemática discreta y combinatoria"de R. Grimaldi.

Definición Un *grafo dirigido (digrafo)* G es un par (V, E) donde V es un conjunto finito no vacío cualquiera y $E \subset V \times V$. Los elementos de V se denominan *vértices* y los de E *aristas*.
Las aristas de la forma (x, x) se denominan *lazos*.
Decimos que un grafo es *no dirigido* si E es simétrico, es decir,

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E.$$

Si el grafo es no dirigido nos referiremos a las aristas como $\{x, y\}$ en lugar de (x, y).

Existe una representación gráfica natural de los grafos en la cual los vértices se representan como puntos y las aristas de la forma (x, y) como segmentos dirigidos o flechas de x a y. Si el grafo es no dirigido las aristas se representan como segmentos que unen los puntos que la componen en lugar de segmentos dirigidos.

Ejemplos

1. Sea V cualquiera, $G_1 = (V, \{\})$ se denomina *grafo vacío.*
2. Sea V cualquiera y $D = \{(x, x) : x \in V\}$, $G_2 = (V, E)$ donde $E = (V \times V) - D$ se denomina *grafo completo* y se denota K_n donde $n = |V|$.
3. $G_3 = (V, E)$ donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ es un ejemplo de grafo dirigido.
4. $G_4 = (V, E)$ donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ es un ejemplo de grafo no dirigido.

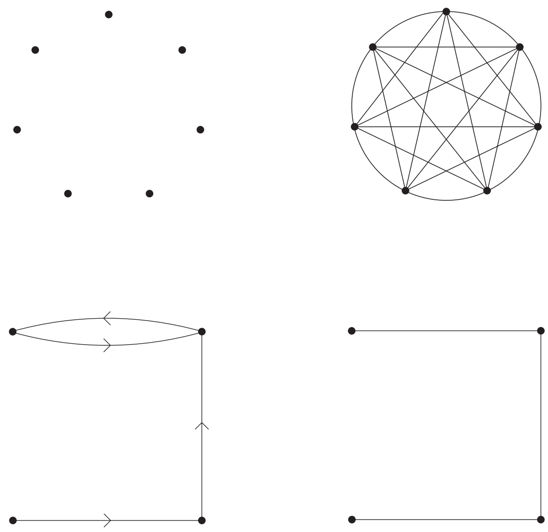

Figura 1: Representación gráfica de los grafos de los ejemplos

A menos que se especifique lo contrario todos los grafos que consideremos serán no dirigidos y sin lazos.

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo.
Decimos que dos vértices x e y son *adyacentes* o *vecinos* si $\{x, y\}$ es una arista.
El *grado de un vértice* x es la cantidad de aristas que inciden en él, es decir:

$$gr(x) = |\{y \in V : \{x, y\} \in E\}|.$$

Proposición Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, entonces se cumple que

$$\sum_{x \in V} gr(x) = 2|E|.$$

Demostración. Cada arista aporta 2 unidades a la sumatoria considerada. □

Definiciones Sea G un grafo, sean x e y vértices.
Denominamos *camino de longitud* $r \geq 1$ de x a y a una sucesión de vértices $(x_0, x_1, ..., x_r)$ donde $x_0 = x$, $x_r = y$ y se cumple que $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$. Si $x = y$ decimos que el camino es *cerrado*, de lo contrario, decimos que el camino es *abierto*.
Un *camino trivial* es un camino que consiste en un único vértice y no posee aristas (i.e. tiene longitud 0), no se considera abierto ni cerrado.
Un *camino simple* es un camino abierto que no repite vértices.
Un *recorrido* es un camino abierto que no repite aristas.
Un *circuito* es un camino cerrado que no repite aristas.
Un *ciclo* es un camino cerrado que no repite vértices salvo el inicial y final.

Proposición Sea G un grafo, sean x e y vértices. Si existe un camino de x a y entonces existe un camino simple de x a y.

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo. Decimos que dos vértices x e y están *conectados* si existe un camino de uno a otro (el camino puede ser trivial). Decimos que un grafo es *conexo* si dos vértices cualesquiera están conectados.

Proposición Sea $G = (V, E)$ un grafo. La relación en los vértices "estar conectado con" es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de la relación se denominan *componentes conexas* del grafo.

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo. La *distancia* entre dos vértices conectados x e y se define como

$$d(x, y) = \text{mín}\{r : \text{existe camino de largo } r \text{ de } x \text{ a } y\}.$$

Si además G es conexo decimos que G posee *diámetro* d donde

$$d = \text{máx}\{d(x, y) : x, y \text{ en } V\}.$$

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un grafo $G' = (V', E')$ es *subgrafo* de G si $V' \subset V$ y $E' \subset E$.
El *subgrafo generado* por un subconjunto de vértices V' es el grafo $\langle V' \rangle = (V', E')$ donde $E' = \{(x, y) \in E : x, y \in V'\} = E \cap (V' \times V')$.
Un subgrafo G' de un grafo G se dice *inducido* si existe $V' \subset V$ tal que $\langle V' \rangle = G'$.
Un subgrafo G' de un grafo G se dice *recubridor* si $V' = V$.

Definición Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos.
Decimos que G_1 y G_2 son isomorfos y denotamos $G_1 \cong G_2$ si existe una función biyectiva $\phi : V_1 \to V_2$ que cumple que

$$(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (\phi(x), \phi(y)) \in E_2.$$

Definición
Definición Un grafo $T = (V, E)$ se dice árbol si es conexo y acíclico (no posee ciclos).

Teorema Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si y sólo si existe un árbol recubridor.

Proposición Si $T = (V, E)$ es un árbol y x e y vértices, entonces existe un único camino simple de x a y.

Proposición Si $T = (V, E)$ es un árbol entonces T posee al menos dos hojas (vértices de grado igual a 1).

Proposición Si $T = (V, E)$ es un árbol entonces $|E| = |V| - 1$.

Demostración. Esta demostración puede realizarse por IC en la cantidad de vértices usando el hecho de que siempre existe al menos una hoja. $\square$

Proposición Si $G = (V, E)$ es conexo entonces $|E| \geq |V| - 1$.

Demostración. Considero un árbol recubridor $T = (V', E')$, luego, $|E| \geq |E'| = |V'| - 1 = |V| - 1$. $\square$

Proposición Si $G = (V, E)$ es acíclico entonces $|E| \leq |V| - 1$.

Demostración. Considero los árboles $T_1 = (V_1, E_1), \ldots, T_\kappa = (V_\kappa, E_\kappa)$ correspondientes a las componentes conexas del grafo G, luego,

$$|E| = \sum_{i=1}^{\kappa} |E_i| = \sum_{i=1}^{\kappa} (|V_i| - 1) \leq \left(\sum_{i=1}^{\kappa} |V_i| \right) - 1 = |V| - 1.$$

$\square$

Teorema Equivalen

1. $G = (V, E)$ es un árbol.
2. G acíclico y $|V| = |E| + 1$.
3. G conexo y $|V| = |E| + 1$.