
RESUMEN TEÓRICO SEMANA 8

Relaciones

Este material resume algunos contenidos del capítulo 5 y 7 del libro “Matemática discreta y combinatoria” de R. Grimaldi.

Definición Sean $A, B \subset \mathcal{U}$ conjuntos. El *producto cartesiano* de A y B se define como el conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Decimos que (a, b) es un par ordenado y se tiene que

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ y } b = b'.$$

Observación Si A y B son conjuntos finitos entonces $|A \times B| = |A||B|$.

Definición Sean $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathcal{U}$ conjuntos. El *producto cartesiano* de n conjuntos se define como el conjunto

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i, \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Decimos que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una n -úpla ordenada y se tiene que

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \Leftrightarrow a_i = a'_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Definición Una *relación (binaria)* R de A en B es un subconjunto de $A \times B$, es decir, $R \subset A \times B$. Si $A = B$ decimos que R es una *relación (binaria)* en A .

Decimos que a está *relacionado* con b y escribimos aRb si $(a, b) \in R$.

Intuitivamente la relación R relaciona (vincula, conecta) elementos de A con elementos de B .

Ejemplos

1. $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{x, y, z, t\}$. $R = \{(1, x), (1, z), (2, x), (2, z), (2, t)\}$.
2. $A = B = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. Definimos R como $XRY \Leftrightarrow X \subset Y$.
3. $A = B = \mathbb{Z}$. Definimos R como $xRy \Leftrightarrow x \leq y$

4. Relación módulo n .

$A = B = \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}^*$. Definimos R como $xRy \Leftrightarrow x - y = n$. Esta relación será denotada como $\equiv_n$.

Definiciones Sea A un conjunto y R una relación en A .

- R se dice *reflexiva* si aRa para todo $a \in A$.
- R se dice *simétrica* si $aRb \Rightarrow bRa$.
- R se dice *transitiva* si aRb y $bRc \Rightarrow aRc$.
- R se dice *antisimétrica* si aRb y $bRa \Rightarrow a = b$.

Definición Sean A, B y C conjuntos. R relación de A en B y S relación de B en C .

Definimos la relación *producto* RS de A en C como

$$RS = \{(a, c) : a \in A, c \in C \text{ y existe algún } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$$

Ejemplo Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = C = \{x, y, z, t\}$. $R = \{(1, x), (1, z), (3, x), (3, z), (3, t)\}$ y $S = \{(y, y), (z, z), (t, x), (t, z)\}$. Luego, $RS = \{(1, z), (3, z), (3, x)\}$

Teorema $R_1(R_2R_3) = (R_1R_2)R_3$.

Observación Si $A = B$ entonces podemos definir $R^2 = RR$ y recursivamente podemos definir R^n como $R^1 = R$ y $R^n = R(R^{n-1})$.

Definición Sean A y B conjuntos finitos que supondremos ordenados, es decir $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Sea R una relación de A en B . Una matriz asociada a R es una matriz $M = M(R)$ con m filas y n columnas cuyas entradas se definen como

$$(M)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i R b_j, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Esencialmente la matriz asociada a una relación es un cuadro de doble entrada cuyas filas corresponden a los elementos de A , cuyas columnas corresponden a los elementos de B y en la intersección de una fila y columna dadas hay un 1 si los elementos correspondientes están relacionados y un 0 de lo contrario.

Ejemplo Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = C = \{x, y, z, t\}$. $R = \{(1, x), (1, z), (3, x), (3, z), (3, t)\}$ y $S = \{(y, y), (z, z), (t, x), (t, z)\}$. Tenemos que

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición Se cumple que $M(R)M(S) = M(RS)$ si consideremos el producto usual de matrices utilizando la convención: $1 + 1 = 1$.

Ejemplo

$$M(R)M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(RS)$$

Teorema Sea A un conjunto de n elementos y R una relación en A . Consideremos M la matriz asociada. Se cumple que

1. R reflexiva $\Leftrightarrow I_n \leq M$.
2. R simétrica $\Leftrightarrow M = M^t$.
3. R transitiva $\Leftrightarrow M \cdot M \leq M$.
4. R antisimétrica $\Leftrightarrow M \cap M^t \leq I_n$.

Nota: Si A y B son matrices del mismo tamaño (m filas y n columnas) con entradas a_{ij} y b_{ij} respectivamente, $A \leq B$ significa que $a_{ij} \leq b_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$. $A \cap B = C$ donde $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.

Sea A un conjunto finitos que supondremos ordenados, es decir $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y R una relación en A . La *representación mediante un digrafo* de la relación R consiste en un conjunto de puntos que representan los elementos de $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ unidos por una flecha de a_i a a_j si $(a_i, a_j) \in R$.

Ejemplo Sea $B = \{x, y, z, t\}$ y $S = \{(y, y), (z, z), (t, x), (t, z)\}$ relación en B , representar la relación con un digrafo.

Observación Podemos “traducir” algunas definiciones sobre relaciones en términos de su digrafo, a saber:

1. R reflexiva $\Leftrightarrow$ el digrafo que representa la relación posee lazos en todos sus vértices.
2. R simétrica $\Leftrightarrow$ toda flecha que va, vuelve.

3. R transitiva $\Leftrightarrow$ para todo par de flechas concatenables existe una flecha directa.
4. R antisimétrica $\Leftrightarrow$ las únicas flechas que van y vuelven son lazos.