Matemática discreta 1 | Teórico vespertino (Florencia)
IMERL | 2021

RESUMEN TEÓRICO SEMANA 7
Relaciones de recurrencia (continuación)

Este material está basado en el material colgado en eva "Notas teóricas sucesiones en recurrencia".

Recordemos la definición de relación de recurrencia de orden 1 y 2:

Una *relación de recurrencia lineal de primer orden* es de la forma:

$$Aa_n + Ba_{n-1} = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \tag{1}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ con $AB \neq 0$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función fija.

Una *relación recurrencia lineal de segundo orden* es de la forma:

$$Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \tag{2}$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ con $AC \neq 0$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función fija.

Ya sabemos como hallar las sucesiones que verifican una relación de recurrencia homogénea de orden 1 u orden 2 (ver material de la semana 6 y/o vídeos del 14 y 16 de abril). Recordemos ahora como hallar las sucesiones que verifican una relación de recurrencia no homogénea.

Trabajaremos con relaciones de recurrencia de segundo orden pero para relaciones de primer orden es análogo.
Consideremos la relación de recurrencia de segundo orden

$$(E) \quad Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

$A, B, C \in \mathbb{R}$ con $AC \neq 0$.
Decimos que la relación homogénea asociada es

$$(E^H) \quad Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

Proposición Si $a_n^{(p)}$ es una sucesión particular de (E), tenemos que una solución de (E) es de la forma

$$a_n = b_n + a_n^{(p)}$$

con b_n solución de (E^H), el problema entonces se reducirá a hallar soluciones particulares de (E).

Búsqueda de la solución particular: Consideraremos únicamente el caso en que

$$f(n) = r^n q(n),$$

donde $g(n)$ es un polinomio de grado t y $r \in \mathbb{R}$.
Observar que esto incluye el caso en que $f(n)$ sea un polinomio $(r = 1)$ y también el caso en que $f(n)$ sea exponencial $(q \equiv 1)$.

- Si r no es raiz del polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada entonces existe una solución particular de la forma

  $$a_n^{(p)} = r^n h(n)$$

  donde h es un polinomio del mismo grado que q.

- Si r es raíz simple del polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada entonces existe una solución particular de la forma

  $$a_n^{(p)} = nr^n h(n)$$

  donde h es un polinomio del mismo grado que q.

- Si r es raíz doble del polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada entonces existe una solucién particular de la forma

  $$a_n^{(p)} = n^2 r^n h(n)$$

  donde h es un polinomio del mismo grado que q.

Ejercicio Determinar la sucesión (a_n) definida por la recurrencia

$$a_{n+2} - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3^n$$

y condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 3$.

Las sucesiones particulares que podemos hallar son algo limitadas, por lo cual el siguiente resultado será de utilidad:

Principio de superposición
Si tenemos una sucesión $(a_n^{(1)})$ que verifica una relación de recurrencia

$$(E_1) \qquad Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f_1(n)$$

y una sucesión sucesión $(a_n^{(2)})$ que verifica una recurrencia

$$(E_2) \qquad Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f_2(n)$$

entonces la sucesión $(\alpha a_n^{(1)} + \beta a_n^{(2)})$ verifica la recurrencia

$$(E) \qquad Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = \alpha f_1(n) + \beta f_2(n).$$

Esta observación será utilizada para hallar una solución particular de una recurrencia

$$Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f(n)$$

si $f(n)$ puede expresarse como una combinación lineal $f(n) = \alpha f_1(n) + \beta f_2(n)$ de funciones $f_1(n)$ y $f_2(n)$ para las cuales sí podemos hallar una solución particular de las recurrencias

$$(E_1) \qquad Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f_1(n),$$
$$(E_2) \qquad Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f_2(n).$$

Ejercicio Hallar la sucesión (a_n) que verifica la relación de recurrencia

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n - 2^n$$

con las condiciones iniciales $a_0 = a_1 = 0$.

Estudiemos una forma alternativa de resolver relaciones de recurrencia.
Método de las funciones generatrices Este método consiste en los siguientes pasos:

1. Usar la relación de recurrencia para construir una ecuación de funciones generatrices cuya incógnita sea la función generatriz $A(x)$ de la sucesión (a_n) que queremos determinar.

2. Expresar $A(x)$ como un cociente de polinomios.

3. Usar el método de fracciones simples para expresar $A(x)$ como suma de fracciones simples.

4. Utilizar la fórmula

$$(1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k-1+n}{k-1} x^n$$

   en cada fracción simple para luego obtener a_n comparando coeficientes n-ésimos de cada lado de la igualdad.

Ejercicio Hallar la sucesión (a_n) que verifica la relación de recurrencia $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n$ con condiciones iniciales $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.