Matemática discreta 1 — Teórico vespertino (Florencia)
IMERL — 2021

Resumen teórico semana 6
Relaciones de recurrencia

Este material está basado en el material colgado en eva “Notas teóricas sucesiones en recurrencia”.

Definición Una *relación de recurrencia lineal de primer orden* es de la forma:

$$Aa_n + Ba_{n-1} = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \tag{1}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ con $AB \neq 0$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función fija.

Ejemplos

1. $a_n = 3a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$
2. $a_{n+1} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$
3. $a_n - 3a_{n-1} = 2^n n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$

Definición Una *relación recurrencia lineal de segundo orden* es de la forma:

$$Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \tag{2}$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ con $AC \neq 0$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función fija.

Ejemplos

1. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$
2. $a_n = a_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$
3. $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$
4. $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Observación Una sucesión que verifica una relación de recurrencia queda (únicamente) determinada a partir de la relación de recurrencia y condiciones iniciales (a_0 si la relación es de primer orden) o a_0 y a_1 (si la relación de recurrencia es de segundo orden). La pregunta que nos haremos ahora es ¿qué forma tienen los términos de la sucesión a_n? ¿existe una expresión (que dependa de n) para a_n?

Si $f(n) \equiv 0$, es decir $f(n) = 0$ para todo n, decimos que la relación de recurrencia es *homogénea*. Comenzaremos analizando este caso.

Relaciones de recurrencia lineal homogéneas

Relación de recurrencia homogénea de primer orden

La forma de una recurrencia lineal de este tipo es

$$Aa_n + Ba_{n-1} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \tag{3}$$

$A, B \in \mathbb{R}$ con $AB \neq 0$.

Por ser $A \neq 0$ multiplicando la ecuación por $\frac{1}{A}$ obtendremos algo de la forma

$$a_n = Ka_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

y por inducción completa es fácil ver que $a_n = K^n a_0$.

Ejercicios Determinar en cada caso la forma del término general sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante una relación de recurrencia y algún término de la sucesión.

1. $a_{n+1} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $a_0 = -1$,
2. $a_n = 3a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ y $a_2 = 18$,
3. $a_n - 2na_{n-1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ y $a_0 = 3$.
   Nota: Esta relación no es una relación de recurrencia lineal, para obtener una relación de recurrencia lineal (que son las que sabemos resolver) tendremos que realizar un cambio de variable $a_n = n!b_n$.

Relación de recurrencia homogénea de segundo orden

La forma de una recurrencia lineal de este tipo es

$$Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \tag{4}$$

$A, B, C \in \mathbb{R}$ con $AC \neq 0$.

A diferencia del la relación de primer orden, en este caso no es evidente la forma que tendrán los términos a_n, por lo que recurriremos a ciertos conceptos de álgebra lineal.

Proposición El conjunto de todas las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican una relación de recurrencia 4 conforman un espacio vectorial de dimensión 2.

El hecho de que las soluciones de 4 conformen un E.V. indica que

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ y } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ verifican (4)} \quad \Rightarrow \quad (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ verifica (4).}$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ verifica (4)} \quad \Rightarrow \quad (\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ verifica (4).}$$

El hecho de que su dimensión sea igual a 2 significa que si $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ conjunto de soluciones LI (no nulas y no múltiplo una de la otra) de la ecuación 4, entonces cualquier solución será de la forma

$$(\alpha a_n + \beta b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Por otro lado sabemos que $a_n = \lambda^n$ con λ raíz de $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ (que se denomina *polinomio característico*) es solución de 4, luego, diferenciaremos en los siguientes tres casos:

1. p posee dos raíces reales distintas λ_1 y λ_2.
   En este caso sabemos que $(\lambda_1)^n$ y $(\lambda_2)^n$ son soluciones LI, luego, cualquier solución será de la forma $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

   $$a_n = \alpha(\lambda_1)^n + \beta(\lambda_2)^n.$$

2. p posee una raíz real doble λ.
   En este caso se puede ver que λ^n y $n\lambda^n$ son soluciones LI, luego, cualquier solución será de la forma $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

   $$a_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n.$$

3. p posee dos raíces complejas conjugadas $\lambda_1 = a+ib = re^{i\theta}$ y $\lambda_2 = a-ib = re^{-i\theta}$.
   en este caso tenemos dos formas de presentar la solución:

   a) Sabemos que $(a + ib)^n$ y $(a - ib)^n$ son soluciones LI, luego, cualquier solución será de la forma $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

   $$a_n = \alpha(a + ib)^n + \beta(a - ib)^n.$$

   Nota: en este caso los coeficientes de α y β pueden resultar complejos.

   b) Sabemos que $r^n \cos(n\theta)$ y $r^n \sin(n\theta)$ son soluciones LI, luego, cualquier solución será de la forma $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

   $$a_n = \alpha r^n \cos(n\theta) + \beta r^n \sin(n\theta).$$

Ejercicios

1. $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 4$ y $a_1 = 5$,
2. $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $a_0 = -1$ y $a_1 = 4$,
3. $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

Relaciones de recurrencia lineal no homogéneas

Trabajaremos con relaciones de recurrencia de segundo orden pero para relaciones de primer orden es análogo.
Consideremos la relación de recurrencia de segundo orden

$$(E) \quad Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

$A, B, C \in \mathbb{R}$ con $AC \neq 0$.
Decimos que la relación homogénea asociada es

$$(E^H) \quad Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

Proposición Si $a_n^{(p)}$ es una sucesión particular de (E), tenemos que una solución de (E) es de la forma

$$a_n = b_n + a_n^{(p)}$$

con b_n solución de (E^H), el problema entonces se reducirá a hallar soluciones particulares de (E).

Búsqueda de la solución particular: Consideraremos únicamente el caso en que

$$f(n) = r^n q(n),$$

donde $g(n)$ es un polinomio de grado t y $r \in \mathbb{R}$.
Observar que esto incluye el caso en que $f(n)$ sea un polinomio ($r = 1$) y también el caso en que $f(n)$ sea exponencial ($q \equiv 1$).

- Si r no es raiz del polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada entonces existe una solución particular de la forma

  $$a_n^{(p)} = r^n h(n)$$

  donde h es un polinomio del mismo grado que q.

- Si r es raíz simple del polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada entonces existe una solución particular de la forma

  $$a_n^{(p)} = nr^n h(n)$$

  donde h es un polinomio del mismo grado que q.

- Si r es raíz doble del polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada entonces existe una solución particular de la forma

  $$a_n^{(p)} = n^2 r^n h(n)$$

  donde h es un polinomio del mismo grado que q.

Ejercicio Determinar la sucesión (a_n) definida por la recurrencia

$$a_{n+2} - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3^n$$

y condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 3$.