
RESUMEN TEÓRICO SEMANA 4

Este material está basado en el material colgado en eva “Notas del teórico del 2020”.

Definiciones

- Sean A y B conjuntos no vacíos. Una *función* $f : A \rightarrow B$ es una forma de asociar a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B . Dada un elemento $a \in A$ la función f le asocia un elemento b escribimos

$$f(a) = b,$$

y decimos que b es *la imagen* de a .

- Dada una función $f : A \rightarrow B$. El conjunto *imagen de f* se define como

$$Im(f) = \{b \in B : \exists a \in A, b = f(a)\} \subset B$$

(i.e. el conjunto formado por todos los elementos de B que son imagen de algún elemento de A).

- Dada una función $f : A \rightarrow B$, entonces para cada b en B se define el *conjunto preimagen* de b como

$$f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\} \subset A$$

(i.e. el conjunto formado por todos los elementos de A que van a parar a b). Observar que esta definición tiene sentido incluso cuando f no tiene inversa.

- Una función se dice *inyectiva* si

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

- Una función se dice *sobreyectiva* si

$$Im(f) = B.$$

- Una función se dice *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Notación: Denotaremos $|A|$ al cardinal de un conjunto A .

Principio del palomar (PP)

El enunciado del PP es algo extremadamente elemental, sin embargo la variedad de problemas que pueden ser atacados utilizando esta idea es bastante sorprendente. Principio de palomar: Si m palomas ocupan n nidos y $m > n$, entonces habrá un nido con (al menos) dos palomas.

Ejemplo 1 Probar que si se seleccionan 101 enteros del conjunto $S = \{1, 2, \dots, 200\}$ entonces existen dos números consecutivos. (Pensarlo por un minuto antes de ver la respuesta. ¿Quiénes serían las palomas y los nidos?)

Demostración. Los $m = 101$ enteros seleccionados representarían las palomas mientras que los nidos serían los subconjuntos $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{199, 200\}$ ($n = 100$ nidos). Como $m > n$, existe un subconjunto $\{i, i+1\}$ donde ambos elementos fueron seleccionados.

Matemáticamente, el PP se expresa como: Si $f : A \rightarrow B$ es una función con $|A| > |B|$ entonces f no es inyectiva (Pensar: ¿Quiénes representarían a las palomas y a los nidos?).

Otro enunciado equivalente al PP es el siguiente:

Otra versión del Principio del palomar

Si $f : A \rightarrow B$ es una función con $|A| > |B|$ entonces existe $b \in B$ tal que $|f^{-1}(b)| \geq 2$.

El principio del palomar se puede generalizar de la siguiente forma:

Generalización del Principio del palomar

Si $f : A \rightarrow B$ es una función cualquiera entonces existe $b \in B$ tal que $|f^{-1}(b)| \geq \frac{|A|}{|B|}$.

Dem. Por absurdo, supongamos que $|f^{-1}(b)| < \frac{|A|}{|B|}$ para todo $b \in B$. Observemos que el conjunto A se particiona en conjuntos de la forma preimagen de b , es decir, $A = \cup_{b \in B} f^{-1}(b)$ y además $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') = \emptyset$, luego,

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)| < \sum_{b \in B} \frac{|A|}{|B|} = |B| \cdot \frac{|A|}{|B|} = |A|$$

lo cual es absurdo.

Notación: Denotaremos la intersección de subconjuntos $A \cap B$ como AB .

Principio de inclusión-exclusión (versión conjuntista)

Sea U un conjunto universal con N elementos y $A_1, A_2, \dots, A_n$ ciertos subconjuntos de U cuya unión denotamos por A . Si denotamos S_k a la suma de los cardinales de las intersecciones de los subconjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ tomados de a k subconjuntos, es decir

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}|.$$

Entonces:

$$|A^c| = N - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n = N + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k$$

Principio de inclusión-exclusión (versión Grimaldi)

Sea U un conjunto universal con N elementos y $c_1, c_2, \dots, c_n$ una colección de condiciones respecto de los elementos de U y $\bar{c}_i$ la negación de la condición c_i . Si denotamos

- N a la cantidad de elementos en el conjunto U
- $N(c_i)$ a la cantidad de elementos en el conjunto U que verifican la condición c_i
- $N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k})$ a la cantidad de elementos en el conjunto U que verifican simultáneamente las condiciones $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k}$
- $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k})$

Con las notaciones mencionadas anteriormente, se cumple que

$$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_n) = N - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n = N + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k$$

Observar que llamando $A_i = \{x \in U : x \text{ satisface la condición } c_i\}$ y que $A^c = (\cup_{i=1}^n A_i)^c = \cap_{i=1}^n A_i^c$ la versión conjuntista.

Ejercicio ¿Cuántos enteros positivos $n \leq 1000$ son coprimos con 60?

Ejemplo Calcular el número de funciones sobreyectivas $f : A \rightarrow B$ donde $|A| = m$ y $|B| = n$, este número será denotado $Sob(m, n)$.

Sin perder generalidad podemos suponer $A = \{1, 2, \dots, m\}$ y $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Como conjunto universal tomaremos el conjunto de todas las funciones de A en B , es decir

$$U = \{f : A \rightarrow B\}$$

cuyo cardinal es $N = n^m$.

Consideramos las condiciones $c_1, \dots, c_n$ dadas por

$$c_i : i \notin \text{Im}(f).$$

Las funciones sobreyectivas $f : A \rightarrow B$ son justamente aquellas funciones que no verifican ninguna de las condiciones $c_1, \dots, c_n$ (pues en este caso todo elemento de A estaría en el conjunto imagen de f). Tenemos que $\text{Sob}(m, n) = N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_n)$ para lo cual debemos calcular $S_1, \dots, S_n$ a partir de $N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k})$.

Tenemos que $N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k}) = (n - k)^m$ para todo $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ y que $N(c_1 c_2 \dots c_n) = 0 = 0^m$, luego, $S_k = \binom{n}{k} (n - k)^m$ y

$$\text{Sob}(m, n) = n^m + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)^m = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)^m$$

Ejemplo Calcular d_n , el número de *desórdenes* de tamaño n (permutaciones que no mantienen ningún elemento en su posición original).

Sea U el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ cuyo cardinal es $N = n!$. Consideremos las condiciones $c_1, c_2, \dots, c_n$ dadas por

$$c_i : \text{el elemento } i \text{ aparece en el lugar } i.$$

Queremos contar todas las permutaciones σ que no verifican ninguna de esas n condiciones, es decir, $d_n = N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \dots \bar{c}_n)$.

Observemos que si σ verifica k condiciones $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k}$ entonces las posiciones donde aparecen $i_1, i_2, \dots, i_k$ ya están determinadas (pues quedan fijas), podemos colocar los restantes $n - k$ números en cualquiera de las $n - k$ posiciones libres, para lo cual tenemos $(n - k)!$ formas de hacerlo.

Esto prueba que todos los sumandos de S_k son iguales a $(n - k)!$ por lo tanto por el PIE tenemos:

$$\begin{aligned} d_n &= n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n - k)! k!} (n - k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$