
RESUMEN TEÓRICO SEMANA 2

Este material resume algunos contenidos del capítulo 1 del libro “Matemática discreta y combinatoria” de R. Grimaldi.

Regla de la suma (separación en casos)

Si una tarea 1 puede desarrollarse de m_1 formas, una tarea 2 de m_2 formas, y además, las tareas 1 y 2 no pueden llevarse a cabo simultáneamente, entonces cualquiera de las dos tareas puede desarrollarse de $m_1 + m_2$ formas.

Observación La regla del producto puede generalizarse a k tareas, como se detalla a continuación:

Si una tarea 1 puede desarrollarse de m_1 formas, una tarea 2 de m_2 formas, ... , una tarea k de m_k formas y además, dos de estas tareas cualesquiera no pueden llevarse a cabo simultáneamente, entonces cualquiera de las k tareas puede desarrollarse de $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ formas.

Regla del producto (separación en etapas)

Si una tarea puede desarrollarse en dos etapas, la primera de las cuales (etapa 1) puede desarrollarse de m_1 formas, la segunda (etapa 2) de m_2 formas, entonces la tarea original puede desarrollarse de $m_1 \cdot m_2$ formas.

Observación La regla de la suma puede generalizarse a k tareas, como se detalla a continuación:

Si una tarea puede desarrollarse en k etapas, la primera de las cuales (etapa 1) puede desarrollarse de m_1 formas, la segunda (etapa 2) de m_2 formas, ... , la última (etapa k) de m_k formas, entonces la tarea original puede desarrollarse de $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ formas.

Ejercicios

Hallar la cantidad de números de cinco cifras capicúas de dígitos $\{1, 2, 3, 4\}$. Ejemplos: 14241, 22422, 12221, 444444.

(Respuesta: 4^3).

Hallar la cantidad de números de cinco cifras capicúas de dígitos $\{1, 2, 3, 4\}$ que son impares. Ejemplos: 41214, 22422, 444444.

(Respuesta: $2 \cdot 4^2$).

Definición El *factorial* de un número $n \in \mathbb{N}$ se define como

$$0! = 1 \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{si } n \neq 0$$

Definición Una *permutación* es una disposición lineal de n objetos (distintos).

Ejemplo Si considero los 3 objetos $\{a, b, c\}$ dos permutaciones posibles son (a, b, c) ó (b, c, a) .

Nota: (a, b, a) no es una permutación de esos 3 objetos ya que uno de ellos se repite y falta otro de ellos.

Definición P_n refiere a la cantidad de permutaciones de n objetos (distintos), es decir, la cantidad de formas de ordenar n objetos (distintos). Se puede probar, usando la regla del producto, que

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Observación Esta fórmula también tiene sentido para $n = 0$.

Definición Dado un conjunto de n objetos, si $1 \leq r \leq n$. Una *permutación de tamaño r* es la elección de r objetos (todos ellos distintos) en forma ordenada.

Ejemplo Si considero los 3 objetos $\{a, b, c, d\}$ dos permutaciones de tamaño 3 posibles son (a, d, c) ó (b, c, a) .

Nota: (a, b, a) no es una permutación de tamaño 3 de esos 4 objetos; (a, b) es una permutación de tamaño 2 pero no de tamaño 4.

Definición $P(n, r)$ refiere a la cantidad de permutaciones de tamaño r de un conjunto de n objetos. Se puede probar, usando la regla del producto, que

$$\begin{aligned} P_n &= n \cdot (n-1) \cdots (n-(r-1)) = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \\ &= n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) \cdot \frac{(n-r) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Observación Esta fórmula también tiene sentido para $r = 0$ tanto como para $n = 0$.

Observación $P_n = P(n, n)$.

Ejercicio

Nota: Recordemos que durante este curso cuando digamos palabras nos referiremos a palabras con o son sentido, es decir, tiras de símbolos en el alfabeto.

¿Cuántas palabras pueden formarse intercambiando las letras de la palabra HOLA?.
Ejemplos: HOLA, LAOH, HALO.

(Respuesta: $P_4 = 4!$)

Problema

¿Cuántas palabras pueden formarse intercambiando las letras de la palabra TALA? Aquí no podremos considerar directamente permutaciones de 4 elementos ya que dos formas posibles de ordenar las letras dan lugar a una misma palabra, por ejemplo: TA_1LA_2 y TA_2LA_1 son la misma palabra.

Sucede que existen $2! = 2$ formas de ordenar las letras A_1 y A_2 , es decir, estamos contando duplicadamente las palabras al considerar P_4 , por esta razón, la respuesta a nuestro problema será $\frac{P_4}{2!} = \frac{4!}{2!} = 12$.

Ejercicio

¿Cuántas palabras pueden formarse intercambiando las letras de la palabra AVALA? (Respuesta: $\frac{5!}{3!}$)

Ejercicio

¿Cuántas palabras pueden formarse intercambiando las letras de la palabra SAL-TAS? Sugerencia: Pensar cuántas formas tengo de ordenar los símbolos S_1, S_2 y los símbolos A_1, A_2 **simultáneamente**.

(Respuesta: $\frac{6!}{2!2!}$)

En general se cumple que si tengo n objetos de los cuales n_1 objetos son del mismo tipo (indistinguibles), n_2 objetos del mismo tipo (indistinguibles), ..., n_k objetos del mismo tipo (indistinguibles), entonces la cantidad de formas de ordenarlos es

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!}$$

Definición Dado un conjunto de n objetos, si $1 \leq r \leq n$. Una *combinación de tamaño r* es la elección de r objetos (todos ellos distintos) sin importar el orden.

Ejemplo Si considero los 3 objetos $\{a, b, c, d\}$ dos combinaciones de tamaño 3 posibles son $\{a, d, c\} = \{a, c, d\}$ ó $\{b, c, a\} = \{b, a, c\}$.

Notas:

$\{a, d, c\} = \{a, c, d\} = \{c, a, d\} = \{c, d, a\} = \{d, c, a\} = \{d, a, c\}$.

$\{a, a, b\} = \{a, b\}$ no es una combinación de tamaño 3 pues posee 2 objetos en lugar de 3.

Definición $C(n, r) = \binom{n}{r}$ refiere a la cantidad de combinaciones de tamaño r de un conjunto de n objetos. Se puede probar, usando la regla del producto, que $P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$, luego,

$$\frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Ejercicio ¿Cuántas formas tengo de distribuir en 4 equipos A, B, C y D de 9 integrantes cada uno, a 36 personas? ¿Cuántas formas tengo de distribuir en 4 equipos de 9 integrantes cada uno, a 36 personas?

(Respuestas: $\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9}$ y $\frac{\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9}}{4!}$)

Problema Quiero elegir 8 bizcochos entre bizcochos de queso, de membrillo y vigilantes. ¿Cuántas formas hay de hacerlo?

Podemos pensar en un esquema con 8 letras x (cada una de ellas representa un bizcocho) y dos símbolos $|$ que denotarán el límite entre bizcochos de un tipo y otro. Asumamos que en colocamos en una primera bolsa los de queso, en una segunda bolsa los de membrillo y en una tercer bolsa los vigilantes.

Ejemplos

- La palabra $xxxx | x | xxx$ corresponde con la elección de 4 bizcochos de queso, 1 de membrillo y 3 vigilantes.
- La palabra $| xx | xxxxxx$ corresponde con la elección de 2 de membrillo y 6 vigilantes
- La palabra $x || xxxxxxx$ corresponde con la elección de 1 de queso y 7 vigilantes.

Cada palabra diferente representa una elección distinta de bizcochos. Además sabemos que existen $\frac{(8+2)!}{8!2!}$ palabras diferentes, es decir $\frac{(8+2)!}{8!2!}$ elecciones posibles de bizcochos.

En general, el esquema anterior lo podemos realizar para cualquier elección de r objetos de k distintos tipos de objetos (que eventualmente puedo repetir). La cantidad de formas en la que podemos hacer esta elección de acuerdo al esquema anterior es considerar r letras x , $k - 1$ símbolos $|$ y calcular cuantas palabras hay, esto es,

$$CR(k, r) = \frac{(r + k - 1)!}{r!(k - 1)!}.$$

Esto se denomina combinaciones con repetición de k tomadas de a r .