
RESUMEN TEÓRICO SEMANA 12
Coloración

Este material resume algunos contenidos del capítulo 11 del libro “Matemática discreta y combinatoria” de R. Grimaldi (aunque usamos notación diferente).

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo y λ en $\mathbb{N}^*$. Una *coloración propia* del grafo G es una función $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ tal que

$$\{x, y\} \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y).$$

El conjunto $\{1, 2, \dots, \lambda\}$ es el conjunto de colores. El mínimo número de colores requeridos para que exista una coloración propia se denomina *número cromático del grafo* y se denota $\chi(G)$.

Ejercicio Determinar el número cromático de los siguientes grafos:

- A. C_3 ,
- B. C_4 ,
- C. C_n ,
- D. K_4 ,
- E. K_n ,
- F. $K_{n,m}$.

Observación Si H es un subgrafo de G entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo y λ en $\mathbb{N}^*$. El *polinomio cromático del grafo* G (que denotaremos $P_G(\lambda)$, $P(G, \lambda)$) es una función que indica la cantidad de coloraciones propias que existen de G teniendo λ colores disponibles.

Ejercicio Determinar el polinomio cromático de los siguientes grafos:

A. Grafo vacío.

B. K_4 ,

C. K_n ,

D. P_4 ,

E. P_n ,

F. $G = K_4 - e$.

Observación $\chi(G) = \min\{\lambda \in \mathbb{N}^* : P_G(\lambda) \neq 0\}$.

Teorema Sea T un árbol con n vértices, entonces

$$P(T, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$$

Teorema (Método de agregado y contracción de aristas)

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $e = \{a, b\} \notin E$.

$$P(G, \lambda) = P(G + e, \lambda) + P(G_{a,b}, \lambda)$$

Nota: El grafo $G + e = (V_1, E_1)$ consiste en el grafo G al cual le agregamos la arista e , esto es,

$$V_1 = V \quad E_1 = E \cup \{e\}.$$

y el grafo $G_{a,b} = (V_2, E_2)$ se obtiene luego de identificar los vértices a y b en el grafo G , esto es,

$$V_2 = V \setminus \{a, b\} \cup \{ab\}$$

$$E_2 = \{\{x, y\} \in E : x \neq a, b, \quad y \neq a, b\} \cup \{\{ab, y\} : \{a, y\} \in E \text{ o } \{b, y\} \in E\}.$$

Ejercicio Determinar el polinomio cromático de C_4 .

Teorema (Método de borrado y contracción de aristas)

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $e = \{a, b\} \in E$.

$$P(G, \lambda) = P(G - e, \lambda) + P(G_{a,b}, \lambda)$$

Nota: El grafo $G - e = (V_1, E_1)$ consiste en el grafo G al cual le quitamos la arista e , esto es,

$$V_1 = V \quad E_1 = E \setminus \{e\}.$$

Ejercicio Determinar el polinomio cromático de C_4 .

Teorema Sea G un grafo y G_1 y G_2 subgrafos tales que $G = G_1 \cup G_2$ y $G_1 \cap G_2 = K_n$, luego,

$$P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda) \cdot P(G_2, \lambda)}{P(K_n, \lambda)}$$