Matemática discreta 1 — Teórico vespertino (Florencia)
IMERL — 2021

Resumen teórico semana 11
Grafos planos

Este material resume algunos contenidos del capítulo 11 del libro “Matemática discreta y combinatoria”de R. Grimaldi.

Definición Decimos que un (multi)grafo es plano si existe una representación gráfica en la que los segmentos que representan las aristas solo se intersequen en lo vértices.

Ejercicio Determinar si son planos los siguientes grafos:

A. Q_3

B. K_4

C. K_5

D. $K_{2,3}$

E. $K_{3,3}$

Teorema Sea G un (multi)grafo plano conexo, sean $|E|$ la cantidad de aristas, $|V|$ la cantidad de vértices y $|R|$ la cantidad de regiones que quedan definidas por la representación gráfica plana (entre las regiones se incluye la región infinita). Entonces se cumple que

$$|V| - |E| + |R| = 2.$$

Observación La cantidad de regiones es un invariante del grafo (no depende de la representación gráfica que realicemos).

Corolario Sea G un (multi)grafo plano con k componentes conexas, sean $|E|$ la cantidad de aristas, $|V|$ la cantidad de vértices y $|R|$ la cantidad de regiones que quedan definidas por la representación gráfica plana (entre las regiones se incluye la región infinita). Entonces se cumple que

$$|V| - |E| + |R| = 1 + k.$$

Corolario Sea G un grafo plano sin lazos conexo, sean $|E|$ la cantidad de aristas, $|V|$ la cantidad de vértices y $|R|$ la cantidad de regiones que quedan definidas por la representación gráfica plana (entre las regiones se incluye la región infinita). Entonces se cumple que

$$3|R| \leq 2|E| \quad \text{y} \quad |E| \leq 3|V| - 6.$$

Definiciones Sea $G = (V, E)$ un grafo sin lazos no vacío.

Una *subdivisión elemental* de G es el grafo que se obtiene luego de remover una arista $\{x, y\}$ y agregar una vértice z y las aristas $\{x, z\}$ y $\{z, y\}$.

Dos grafos sin lazos se dicen *homeomorfos* si son isomorfos o se obtienen a partir de subdivisiones elementales de grafos isomorfos.

Observación Si dos grafos G_1 y G_2 son homeomorfos entonces G_1 es plano si y sólo si G_2 lo es.

Observación Dos grafos homeomorfos sólo pueden diferir en la cantidad de vértices de grado 2.

Teorema de Kuratowski.
G es plano si y sólo si no posee subgrafos homeomorfos a K_5 o a $K_{3,3}$. (no realizaremos la prueba)

Observación Una forma sencilla de justificar que un grafo no es plano es encontrar un subgrafo que sea homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.