Matemática discreta 1 — Teórico vespertino (Florencia)
IMERL — 2021

Resumen teórico semana 10
Grafos Eulerianos y Hamiltonianos

Este material resume algunos contenidos del capítulo 11 del libro “Matemática discreta y combinatoria”de R. Grimaldi.

Definición Un *multigrafo* G es una tripleta (V, E, m) donde V es un conjunto finito no vacío cualquiera, $E \subset V \times V$ simétrico y $m : E \to \mathbb{N}$ función que indica la cantidad de veces que aparece cada arista. También puede resumirse la información de m con un supraíndice en los elementos de E, es decir, $E = \{e_1^{m(e_1)}, \ldots, e_s^{m(e_s)}\}$ y en este caso E es un *multiconjunto.*

Existe una representación gráfica natural de los multigrafos en la cual los vértices se representan como puntos y las aristas de la forma $e = \{x, y\}$ como $m(e)$ segmentos de x a y.

Ejemplo G dado por $V = \{a, b, c\}$ y $E = \{\{a, b\}^{(1)}, \{a, c\}^{(1)}, \{b, c\}^{(2)}, \{c\}^{(2)}\}$.

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo.
El *grado de un vértice* x es la cantidad de aristas que inciden en él.
Nota: Los lazos $e = \{x\}$ inciden dos veces en el vértice x.

Proposición Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo, entonces se cumple que

$$\sum_{x \in V} gr(x) = 2|E|.$$

Demostración. Cada arista aporta 2 unidades a la sumatoria considerada. □

Nota: $|E|$ cuenta las aristas con su respectiva multiplicidad, es decir, si

$$E = \{e_1^{m(e_1)}, \ldots, e_s^{m(e_s)}\}$$

entonces $|E| = m(e_1) + \ldots + m(e_s)$.

Corolario La cantidad de vértices de grado impar es par.

Demostración. La suma de todos los grados es un número par, luego, la suma de los grados impares es un número par para lo cual, la cantidad de vértices de grado impar debe ser par. □

Podemos adaptar las definiciones de *camino, camino simple, recorrido, circuito y ciclo* a multigrafos. La única consideración que debemos tener es la siguiente: representaremos los caminos en lugar de con una sucesión de vértices con una sucesión de vértices y aristas (puesto que las aristas no quedan únicamente determinadas por los vértices inicial y final).

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo sin vértices aislados.
Decimos que G posee un *circuito Euleriano* si posee un circuito que pasa por todas las aristas del multigrafo. En este caso decimos que el multigrafo es *Euleriano.*
Decimos que G posee un *recorrido Euleriano* si posee un circuito que pasa por todas las aristas del multigrafo.

Teorema Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo sin vértices aislados.
G posee un circuito Euleriano si y sólo si G es conexo y todo vértice posee grado par.

Corolario Sea grafo $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo sin vértices aislados.
G posee un recorrido Euleriano si y sólo si G es conexo y posee exactamente dos vértices de grado impar.

Demostración. Observemos en primer lugar que un multigrafo G posee un recorrido Euleriano si y sólo si al agregarle una arista (la arista $\{x, y\}$ donde x el el vértice inicial del recorrido e y el vértice final del recorrido, por lo cual $x \neq y$) posee un circuito Euleriano. Luego, si $G \cup \{e\}$ es Euleriano esto equivale a que todos sus vértices poseen grado par, por lo cual G posee exactamente dos vértices de grado impar. $\square$

<u>Nota</u>: $G \cup \{e\} = (V', E')$ donde $V' = V$ y $E' = E \cup \{e\}$.

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo con $|V| \geq 3$.
Decimos que G posee un *ciclo Hamiltoniano* si posee un ciclo que pasa por todos los vértices del multigrafo. En este caso decimos que el multigrafo es *Hamiltoniano.*
Decimos que G posee un *camino Hamiltoniano* si posee un camino simple que pasa por todos los vértices del multigrafo.

Observaciones

1. Si G posee un ciclo Hamiltoniano entonces $gr(x) \geq 2$ para todo x en V.

2. Si $gr(x) = 2$ para algún x en v y e, e' son las aristas incidentes a él, entonces e, e' deben participar de cualquier ciclo Hamiltoniano.

3. Si $gr(x) > 2$ para algún x en v y e, e' son las aristas incidentes a él que además participan de un ciclo Hamiltoniano entonces las restantes aristas no podrán participar del ciclo Hamiltoniano.

4. Si estamos intentando construir un ciclo Hamiltoniano, el ciclo no debe cerrarse hasta no haber pasado por todos los vértices.

Teorema Sea $G = (V, E)$ un grafo sin lazos tal que $gr(x) + gr(y) \geq n - 1$ para todo par de vértices $x \neq y$ (donde $n = |V|$), entonces existe un camino Hamiltoniano.

Teorema Sea $G = (V, E)$ un grafo sin lazos tal que $gr(x) + gr(y) \geq n$ para todo par de vértices $x \neq y$ no adyacentes (donde $n = |V|$), entonces existe un ciclo Hamiltoniano.

Observación El teorema anterior establece una condición suficiente pero no necesaria como lo muestra el ejemplo siguiente: C_6 ciclo de 6 vértices es Hamiltoniano y no verifica la condición del Teorema anterior.

Definición Decimos que un grafo $G = (V, E)$ es bipartito si existen V_1 y V_2 subconjuntos de V disjuntos no vacíos tales que $E \subset (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)$. En otras palabras, las aristas de G unen puntos de V_1 con puntos de V_2 únicamente.

Proposición G es bipartito si y sólo si no posee ciclos impares.

Demostración. La idea de esta prueba consiste el etiquetar los vértices con dos colores diferentes de modo tal que vértices adyacentes no sean etiquetados con el mismo color. $\square$

Observación Si un grafo es bipartito y Hamiltoniano entonces $|V_1| = |V_2|$.