Práctico 1

lunes, 8 de marzo de 2021 13:54

Ej 2 $p = (p_1 \dots p_m)$ $g: A \to B$

1) $H(X) \geq 0$, ¿p t.q. $H(X) = 0$?

$$H(X) = \sum_{i=1}^{m} p_i(-\log p_i)$$

Como $p_i \in [0,1]$, $\Rightarrow -\log(p_i) \geq 0$
$\Rightarrow H(X) \geq 0$

Para p de la forma $(0 0 \dots 1 \dots 0)$,
tenemos $-p_i \log p_i = 0$ para $p_i = 0$, por convención.
$-\log p_i = 0$ para $p_i = 1$
$\Rightarrow H(X) = 0$.

Estos son todos los p t.q $H(p) = 0$.

2) $H(Y|X) = 0 \Rightarrow Y$ es función de X.

$$0 = H(Y|X) = \sum_{x \in A} p(x) . \underline{H(Y|X=x)}$$

Como todos los términos son no negativos,

Para todo $x \in A$, o bien $p(x) = 0$
o $H(Y|X=x) = 0$

Si $p(x) > 0$, entonces $\underline{H(Y|X=x) = 0}$

Entonces, por la parte 1, $p_{Y|X=x} = (0 0 \dots 1 \dots 0)$
es decir existe $y \in Y$ t.q.
$P(y|X=x) = 1$
$P(y'|X=x) = 0 \quad \forall y' \neq y$.

Por lo tanto $p(x,y) = \overbrace{p(x)}^{>0} . \overbrace{p(y|x)}^{1} > 0$
$p(x,y') = p(x) . \underbrace{p(y'|x)} = 0$

3) $H(X, g(X)) = H(X) + \overbrace{H(g(X)|X)}^{0}$
$= H(g(X)) + H(X|g(X))$

$H(g(X)|X) = 0$ porque para todo x t.q. $\underline{p(x) > 0}$, $p_{Y|X=x} = (0 \dots 1 \dots 0)$ donde $Y = g(X)$
$\downarrow$ $g(x)$

$$H(X) \overset{(*)}{=} H(g(X)) + \underbrace{H(X|g(X))}_{\geq 0}$$
$$\geq H(g(X))$$

Si g es inyectiva, entonces $x = g^{-1}(g(x))$ para x t.q. $p(x) > 0$

$\Rightarrow H(X|g(X)) = H(g^{-1}(\overbrace{g(X)}^{Z}) | \overbrace{g(X)}^{Z}) = 0$

$\Rightarrow H(X) = H(g(X))$ por $(*)$

Si $H(X) = H(g(X)) \Rightarrow$ por $(*)$
$H(X|g(X)) = 0$

$\Rightarrow X$ "es función" de $g(X)$

$\Rightarrow g$ es inyectiva (restringida...)

Ej 3 $H(X) \leq \log|A|$

$$0 \leq D(p\|u) = E_p\left[\log \frac{p(X)}{u(X)}\right]$$
$$= E_p[\log p(X)] - E_p[\log u(X)]$$
$$= -H(X) + E_p[-\log u(X)]$$

$\Rightarrow H(X) \leq E_p[-\log u(X)]$
$= E_p\left[-\log \frac{1}{|A|}\right] = \log|A|$

con igualdad sii $p = u$.

Ej 4 (cota de independencia)

$H(X Y) \leq H(X) + H(Y)$

con igualdad sii X, Y indep.

$0 \leq D(p(x,y) \| q(x,y))$

donde $q(x,y) = p(x)p(y)$

con igualdad sii las distribuciones son iguales

$$0 \leq E_{p(x,y)}\left[\log \frac{p(x,y)}{q(x,y)}\right]$$

$\log p(x) + \log p(y)$

$= -E_{p(x,y)}[-\log p(x y)] - E_{p(x,y)}[\log q(x,y)]$

$= -H(X Y) + (E_{p(x y)}[-\log p(x)] + E_{p(x y)}[-\log p(y)])$

$= -H(X Y) + H(X) + H(Y)$

Ej 5 $\underline{H(X|Y) \leq H(X)}$

con ig. sii X, Y indep.

$H(X Y) \leq H(X) + H(Y)$
$\parallel$
$\Rightarrow \cancel{H(X)} + H(Y|X) \leq \cancel{H(X)} + H(Y)$

$H(Y|X=x)$ no necesariamente es $\leq$ que $H(Y)$