Modelo Información

miércoles, 3 de febrero de 2021 17:59

$X = 4$
$Y = 2$

$P\{3 \le x \le 4\} = 1/3$
$P\{Y \le 3\} = 1/2$

$P\{3 \le x \le 4, Y \le 3\} = 1/6$

$J(1/3) + J(1/2) = J(1/6)$

- Inform. relativa a nuestro conocimiento previo
- Modelamos ese conocimiento previo a través de una distribución de probabilidades.

- $0 \le x \le 10$ Nada de inform.
- $x > 1$ Poca información
- $3 \le x \le 4$ más información

Prob. grande $\Rightarrow$ poca inform.
Prob. chica $\Rightarrow$ mucha inf.

$J: (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{\ge 0}$

J monótona decreciente estricta.

$J(pq) = J(p) + J(q)$

Tesis: $J(p) = -C \log p$, $C > 0$

Demostración

Definimos $f(x) = J(2^{-x})$

$g: \mathbb{R}^{\ge 0} \longrightarrow (0,1]$, $g(x) = 2^{-x}$

$f = J \circ g$, $f: \mathbb{R}^{\ge 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\ge 0}$

Vamos a mostrar q.e $f(x) = C \cdot x$, $C > 0$.

Entonces,

$J(p) = J(2^{-(-\log_2 p)}) = f(-\log p) = -C \log p$

Sabemos q.e:

(A) * f es monótona creciente

(B) * $f(n+m) = J(2^{-(n+m)}) = J(2^{-n} \cdot 2^{-m})$ (def f.; exp.)

$= J(2^{-n}) + J(2^{-m}) = f(n) + f(m)$ (Hip sobre J; def. de f.)

Tomamos $C = f(1)$,

Notamos q.e $f(1) > f(0) = J(1) \ge 0$

* Para los naturales

(Paso base) $f(1) = C \cdot 1$

(paso ind) $f(n) = f(n-1+1) \overset{B}{=} f(n-1) + f(1) \overset{\text{Ind}}{=} C(n-1) + C = C \cdot n$

* Para $x \in \mathbb{Q}$, $x = n/m$

$m \cdot f(n/m) = \underbrace{f(n/m) + f(n/m) + \cdots + f(n/m)}_{m \text{ veces.}}$

$\overset{(B)}{=} f(n/m + n/m + \cdots + n/m)$

$= f(n) = C \cdot n$

$\Rightarrow f(n/m) = C \cdot n/m$

* Para $x \in \mathbb{R}$

Sean $\{\mu_i^-\} \subset \mathbb{Q}$, $\mu_i^- \nearrow x$, $\{\mu_i^+\} \subset \mathbb{Q}$, $\mu_i^+ \searrow x$

$f(\mu_i^-) \le f(x) \le f(\mu_i^+)$

$C \cdot \mu_i^- \le f(x) \le C \cdot \mu_i^+$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$C \cdot x$ $C \cdot x$ $C \cdot x$