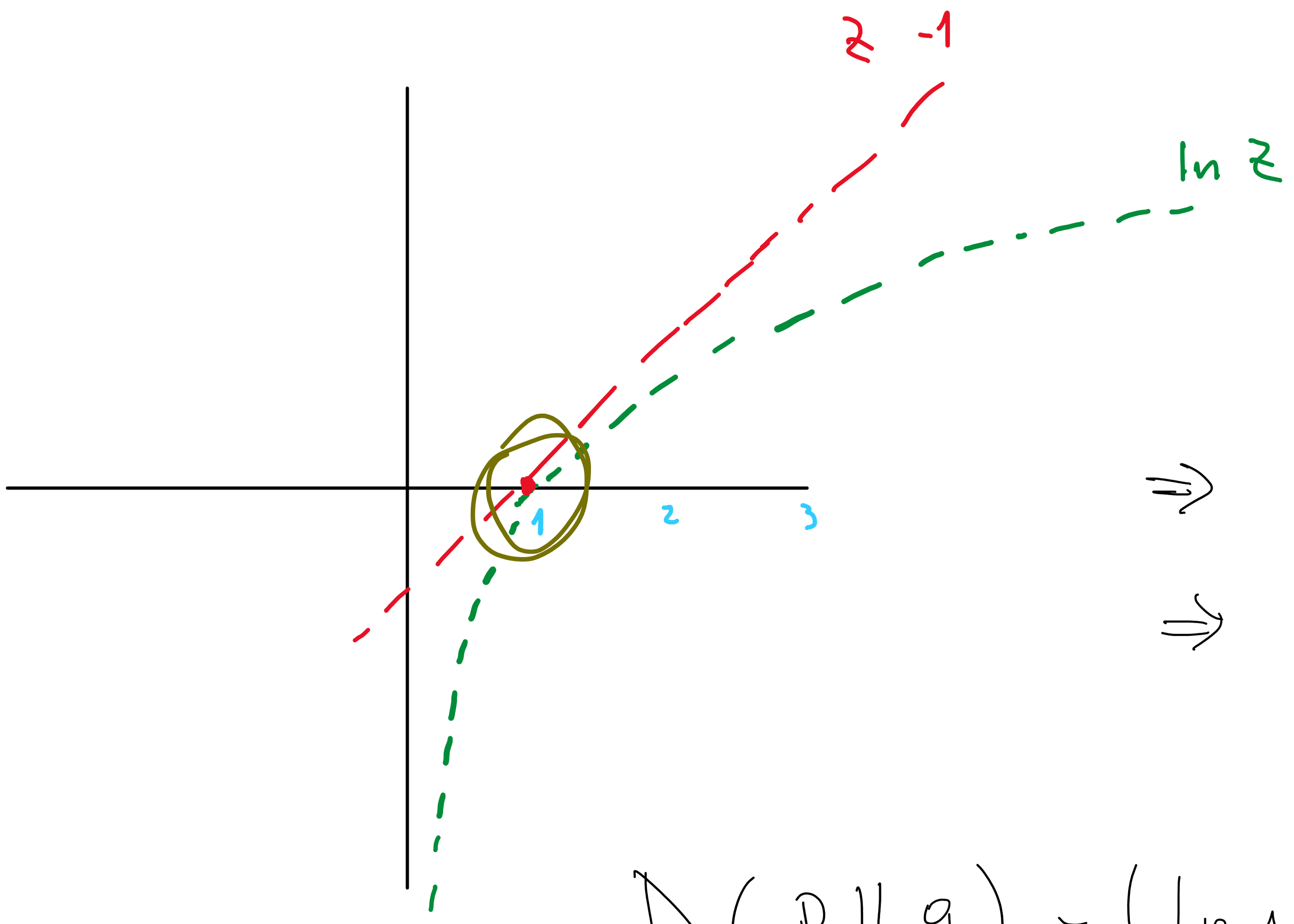
Desigualdad de la Información

miércoles, 3 de marzo de 2021 16:12



$$\ln z \leq z - 1$$

$$\Rightarrow \quad -\ln z \geq 1 - z$$

$$\Rightarrow \quad \ln 1/z \geq 1 - z \qquad (*)$$

$$D(p\|q) = (\log e) \cdot \sum_{x:p(x)>0} p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$\overset{(A)}{\geq} (\log e) \sum_{x:p(x)>0} p(x) \left(1 - \frac{q(x)}{p(x)}\right)$$

$$= (\log e) \underbrace{\left(\underbrace{\sum_{x:p(x)>0} p(x)}_{1} - \underbrace{\sum_{x:p(x)>0} \cancel{p(x)} \frac{q(x)}{\cancel{p(x)}}}_{\leq 1} \right)}_{\geq 0}$$

$$\overset{(B)}{\geq} 0$$

Si $p = q$, entonces todos los términos en la sumatoria $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}$ valen cero, porque o bien $p(x) = 0$, o $\frac{p(x)}{q(x)} = 1$.

Supongamos ahora que $D(p\|q) = 0$. Entonces hay igualdad en (A) y en (B).

La igualdad en (B) implica que $\sum_{x:p(x)>0} q(x) = 1$, de donde surge que $q(x) = 0$ para todo x t.q. $p(x) = 0$.

Como la desigualdad en (A) se cumple término a término, la igualdad en (A) implica que

$$1 - \frac{q(x)}{p(x)} = \ln \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{para todo } x \text{ tal que } p(x) > 0,$$

que a su vez implica que $\frac{p(x)}{q(x)} = 1$ porque la igualdad en (*) solo ocurre para $z = 1$.