Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2023**

Examen (versión 1) - Sábado 9/12/2023, 14:00 hs.

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

Múltiple Opción: Total 60 puntos.

Cada respuesta correcta vale 12 puntos; incorrecta: -4 puntos; no responde: 0 puntos.

Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.

1	2	3	4	5

Ejercicio 1

Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno

$$\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + xy' + yx' + 2yy' + zz'$$

y el plano $\pi := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0\}$.

Entonces, la proyección ortogonal del vector $(1,1,1)$ sobre el plano π es:

A) $(0,0,0)$.
B) $\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$.
C) $(1,-1,0)$.
D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

Ejercicio 2

Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con producto interno y de dimensión finita, $T : V \to W$ una transformación lineal.

Se consideran las afirmaciones:

(1) $T^* \circ T$ es autoadjunta.
(2) $\langle T^*(T(v)), v\rangle \geq 0$ para todo $v \in V$.
(3) $N(T^* \circ T) = N(T)$.

Indica la opción correcta:

A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
B) Sólo la afirmación (3) es verdadera.
C) Sólo las afirmaciones (1) y (2) son verdaderas.
D) Ninguna afirmación es verdadera.

Ejercicio 3

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador autoadjunto (según el producto interno habitual de $\mathbb{R}^3$) tal que:

- $T(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x - y + z = 0$.
- $tr({}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}) = 0$, donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Indica la opción correcta:

A) $T((0, 3, 0)) = (6, 0, 6)$.
B) $T((1, -1, 1)) = (0, 0, 0)$.
C) $\det({}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}) = 16$.
D) $T((1, 0, -1)) = (-2, 0, 2)$.

Ejercicio 4

Sean $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, $\mathcal{A} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ una base, y T un operador lineal en $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada en base $\mathcal{A}$ es ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Se consideran las afirmaciones:

(1) $\|T(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.
(2) Existe $\mathcal{B}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ es simétrica.

Indica la opción correcta:

A) Las dos afirmaciones son falsas.
B) Solamente la afirmación (1) es verdadera.
C) Solamente la afirmación (2) es verdadera.
D) Las dos afirmaciones son verdaderas.

Ejercicio 5

Para cada $a \in \mathbb{R}$ sea $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : T_a(x, y, z) = (x + ay + az, -x + y - z, x + 2z)$.

Indica la opción correcta:

A) Para todo $a \in \mathbb{R}$, T_a es diagonalizable y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$ es un subespacio propio.
B) Existe un único $a \in \mathbb{R}$ para el cual T_a es diagonalizable y en ese caso uno de los subespacios propios es $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\}$.
C) Si para un valor dado de $a \in \mathbb{R}$ se tiene que T_a es diagonalizable, entonces 1 es valor propio y el subespacio propio asociado es $S_1 = \{(0, -\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
D) $v = (0, 1, 1)$ es vector propio de T_a, incluso para los valores de a para los que T_a no es diagonalizable.

Desarrollo: 40 puntos.

Si entregas desarrollo, deberás elegir *uno y solamente uno* de los dos problemas.

Problema de Desarrollo 1.

A) Sea $(V, K, +, \cdot, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial y S un subespacio de V de dimensión finita.
Define $P_S : V \to S$ (la proyección ortogonal sobre S), y demuestra que dado $v \in V$, entonces $s' = P_S(v)$ es, de entre todos los vectores $s \in S$, el que minimiza $\|s - v\|^2$ (la norma es la inducida).

B) Dado $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, para cada x_i se mide una respuesta y_i, obteniendo el vector de respuestas $Y = (y_1, \ldots, y_n)$.
Se tiene un modelo $Y = f(X)$ para explicar los datos (X, Y), donde
$f(x_i) = \alpha + \beta\sqrt{x_i} + \gamma x_i^2\ \forall\ i = 1, \ldots, n$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (cada terna (α, β, γ) define una f).
Construye la matriz $\mathbb{A}$ tal que $f(X) = \mathbb{A}X$, explicando cada paso.

C) Si el sistema $\mathbb{A}X = Y$ es incompatible, en cual subespacio debemos buscar un vector $\tilde{Y}$ para el cual el sistema $\mathbb{A}X = \tilde{Y}$ sea compatible? Justifica. Si además deseamos que $\|\mathbb{A}X - \tilde{Y}\|^2$ sea mínima (norma euclídea), cuál vector debe ser $\tilde{Y}$? Justifica.

D) Deduce las ecuaciones normales y, utilizándolas, encuentra la f que minimiza $\|f(X) - Y\|^2$ para $X = (0, 1, 4, 9)$ e $Y = (3, -2, 15, 14)$ y calcula $f(2)$.

Problema de Desarrollo 2.

Sea $T : V \to V$ una T.L., S, S', S'' subespacios de V invariantes bajo T.

A) Demuestra que $S \cap S'$ es invariante bajo T.

B) Demuestra que si $dim(S'') = 1$ entonces S'' está contenido en un subespacio propio de T.

C) Tomemos $V = \mathbb{R}^3$ y T tal que los subespacios

$$S = \{(x, y, z) \in V : x + 2y - z = 0\},$$
$$S' = \{(x, y, z) \in V : x + y + z = 0\},$$
$$S'' = \{(x, y, z) \in V : x + y - 2z = 0\},$$

son invariantes bajo T.

i) Demuestra que T es diagonalizable

ii) Si además se sabe que $2T - T^2 = Id$ en S y que $T = 2Id$ en $S' \cap S''$, encuentra los valores propios de T.