Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Segundo Semestre 2023**

Soluciones al examen del sábado 09 de diciembre de 2023

Múltiple opción

Versión 1.

1	2	3	4	5
B	A	A	A	B

Versión 2.

1	2	3	4	5
C	B	A	D	C

Justificaciones.

1. El plano π podemos verlo como $S = [(1,0,-1),(0,1,-1)]$. Con el producto interno dado por

$$< (x,y,z),(x',y',z') >= xx' + xy' + yx' + 2yy' + zz',$$

tenemos que $S^\perp = [(1,0,1)]$.

Si llamamos P y $P^\perp$ a las proyecciones del vector $v = (1,1,1)$ sobre S y $S^\perp$ respectivamente, como $P + P^\perp = v$, tenemos que $P = v - P^\perp$.

Si normalizamos al vector $(1,0,1)$ con el producto interno definido arriba tendremos que $\left\{(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})\right\} \overset{bon}{\to} S^\perp$. En consecuencia, $P^\perp = \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, donde $\alpha = \dfrac{\langle(1,1,1),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle}{\sqrt{2}}$.

Esto da $P^\perp = \left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$ y por tanto $P = (1,1,1) - \left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$.

Operando tenemos $P = \left(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2}\right)$.

2. 1) Como la adjunta de una composición es la composición de las adjuntas en orden inverso, $(T^* \circ T)^* = T^* \circ (T^*)^*$, y como $(T^*)^* = T$, tenemos que $(T^* \circ T)^* = T^* \circ T$ por lo que la afirmación 1) es verdadera.
   2) Por la definición de adjunta de una TL tenemos que
   $< T^*(T(v)), v >=< T(v), (T^*)^*(v) >=< T(v), T(v) >$, que siempre es no negativo. Por tanto la afirmación 2) es verdadera.
   3) Para probar que dos conjuntos son iguales debemos probar la doble inclusión.
   Sea $v \in N(T)$, entonces $T(v) = 0_W$ y por tanto $(T^* \circ T)(v) = T^*(T(v)) = T^*(0_W) = 0_V$, por lo que $v \in N(T^* \circ T)$ y por tanto $N(T) \subseteq N(T^* \circ T)$.
   Tomemos ahora $v \in N(T^* \circ T)$, entonces $(T^* \circ T)(v) = T^*(T(v)) = 0_V$.
   Calculando el producto interno $\langle (T^* \circ T)(v), v\rangle$ y operando como en la afirmación anterior, tenemos $\langle (T^* \circ T)(v), v\rangle =< 0_V, v >=< T(v), T(v) >= 0$, lo que nos dice que $T(v) = 0_W$ y por tanto $v \in N(T)$.
   Esto prueba que $N(T^* \circ T) \subseteq N(T)$ y que ambos núcleos son iguales, por lo que la afirmación 3) es verdadera.

   Por tanto las 3 afirmaciones son verdaderas.

3. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0\}$, entonces $T(v) = 2v$, $\forall v \in S$. Esto nos dice que $\lambda = 2$ es un valor propio y que $mg(2) \geq 2$.

   Como T es autoadjunta sus valores propios son reales, además $\lambda = 2$ es un valor propio al menos doble, ya que $mg(2) \leq ma(2)$.

   Como la traza de la matriz es igual a la suma de sus valores propios, si fuese $\lambda = 2$ raíz triple, la traza debería valer 6.

   Como la traza vale 0 entonces $\lambda = -4$ es el otro valor propio, por lo que T tiene valores propios $\lambda = 2$ y $\lambda = -4$.

   Al ser T autoadjunta sabemos que $S_{-4} \perp S_2$, y como $S_2 = [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$, se sigue que $S_{-4} = [(1, -1, 1)]$.

   Llamemos $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ a la base de vectores propios $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, -1, 1)\}$.

   Como $w = (0, 3, 0) = v_1 + v_2 - v_3 \Rightarrow T(w) = T(v_1) + T(v_2) - T(v_3) = 2v_1 + 2v_2 - (-4)v_3$ por la linealidad de T.

   Operando obtenemos $T((0, 3, 0)) = (0, 6, 0)$.

   Como $(1, -1, 1) \in S_{-4}$ entonces $T((1, -1, 1)) = (-4, 4, -4)$ que es distinto de $(0, 0, 0)$.

   Como el determinante de la matriz es el producto de los valores propios, es claro que no puede dar un valor positivo.

   Si fuese $T((1, 0, -1)) = (-2, 0, 2)$ esto estaría diciendo que $(1, 0, -1)$ es vector propio para $\lambda = -2$, pero T no tiene ese valor propio.

   Por todo lo anterior es claro que la única opción verdadera es $T((0, 3, 0)) = (0, 6, 0)$.

4. Llamemos v_1, v_2, v_3 a los tres vectores de la base $\mathcal{A}$. La matriz asociada a T en bases $\mathcal{A}, \mathcal{A}$ nos dice que $T(v_1) = -v_1$, $T(v_2) = -2v_1 + v_2$ y que $T(v_3) = -2v_1 + v_2 - v_3$.

   Es claro que $||T(v_3)|| \neq ||v_3||$, ya que $T((0, 0, 2)) = (-1, 1, -2)$ y $||(-1, 1, -2)|| \neq ||(0, 0, 2)||$.

   Por tanto la primera afirmación es falsa.

   Si la segunda afirmación fuese verdadera, entonces T debería ser autoadjunto, y por tanto $< v, T(w) >=< T(v), w > \ \forall \ v, w \in \mathbb{R}^3$.

   Sin embargo alcanza con tomar $v = v_1, \ w = v_2$ para ver que $< v_1, T(v_2) >= -1$ mientras que $< T(v_1), v_2 >= 1$, por lo que la segunda afirmación también es falsa.

   Por tanto ambas afirmaciones son falsas.

5. De la definición de T_a podemos encontrar en forma directa que para la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ se tiene ${}_{\mathcal{C}}(T_a)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Calculando el polinomio característico encontramos $\chi(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ por lo que 1 es valor propio de T_a con $ma(1) = 2$ y 2 es valor propio de T_a con $ma(2) = 1$.

   Para ver si T_a es diagonalizable, alcanza con verificar que $mg(1) = 2$, y para esto calculamos el subespacio propio asociado al valor propio 1, $S_1 = N\left({}_{\mathcal{C}}(T_a)_{\mathcal{C}} - Id\right)$.

   Es inmediato verificar que si $a \neq 0$, $S_1 = [(1, 1, -1)]$ por lo que $mg(1) = 1$ y T no es diagonalizable.

   Necesariamente, existe un único valor $a = 0$ para el cual T_a puede ser diagonalizable. Verifiquemos que efectivamente lo es.

   Calculando $N\left({}_{\mathcal{C}}(T_0)_{\mathcal{C}} - Id\right)$ encontramos que $S_1 = [(-1, 0, 1), (0, 1, 0)]$ por lo que la multiplicidad geométrica $mg(1) = 2$ y entonces T_0 es diagonalizable.

   Finalmente, el subespacio S_1 está dado por $S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + z = 0\right\}$.

De los argumentos anteriores se deduce que existe un único valor de a para el cual T_a es diagonalizable, y en ese caso $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+z=0\}$ es uno de los subespacios propios.

Ejercicios de Desarrollo.

Problema de Desarrollo (1)

A) Ver libro rojo página 96 (teorema 134).

B) Sean las funciones $\varphi_1 : \varphi_1(x) = 1 \ \forall x$, $\varphi_2 : \varphi_2(x) = \sqrt{x} \ \forall x$ y $\varphi_3 : \varphi_3(x) = x \ \forall x$.

El modelo planteado es pues $f = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3$.

Evaluando el modelo en $x_1, c_2, \ldots, x_n$ tenemos

$$f(x_1) = \alpha + \beta\sqrt{x_1} + \gamma x_1$$
$$f(x_2) = \alpha + \beta\sqrt{x_2} + \gamma x_2$$
$$\vdots$$
$$f(x_n) = \alpha + \beta\sqrt{x_n} + \gamma x_n$$

Llamemos $\mathbb{A}$ a la matriz cuyas columnas son $\varphi_1(X), \varphi_2(X), \varphi_3(X)$, esto es, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{x_1} & x_1 \\ 1 & \sqrt{x_2} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sqrt{x_n} & x_n \end{pmatrix}$

En notación matricial es lo mismo que expresar $f(X) = \mathbb{A}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

C) Si el sistema es incompatible es porque el término independiente Y no pertenece al subespacio generado por las columnas de $\mathbb{A}$ (que llamaremos S). Para que el sistema sea compatible, el término independiente $\tilde{Y}$ debe pertenecer a S.

De todos estos $\tilde{Y} \in S$, el que minimiza $||\mathbb{A}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} - Y||^2$ es precisamente la proyección ortogonal de Y sobre S, o sea $\tilde{Y} = P_S(Y)$ (páginas 100-102 del libro rojo).

D) La deducción de las ecuaciones normales $\mathbb{A}^t.\mathbb{A}.\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \mathbb{A}^t.Y$ se encuentra en el libro rojo, página 102.

Para los datos de la letra, $X = (0,1,4,9)$ e $Y = (3,-2,15,14)$, tenemos $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, operando, las ecuaciones normales quedan $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \\ 184 \end{pmatrix}$

Resolviendo las mismas, hallamos (α, β, γ) tales que la función $f(x) = \alpha + \beta\sqrt{x} + \gamma x$ minimiza $||f(X) - Y||^2$ para los datos X, Y dados.

Obtenemos $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$, y operando $f(2) = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + \sqrt{2} \cong 5{,}82$.