Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Primer Semestre 2024**

PRIMER PARCIAL - SÁBADO 27 DE ABRIL DE 2024

Múltiple opción

VERSIÓN 1.

1	2	3	4	5
C	A	A	B	A

VERSIÓN 2.

1	2	3	4	5
C	A	A	D	B

Justificaciones.

1) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T(a + bx + cx^2) = (2a - 4b + c) + 7bx + (-5b + 2c)x^2$$

Entonces:

A) T no es diagonalizable y no es sobreyectiva.
B) T no es diagonalizable e $p : p(x) = x^2$ es vector propio de T.
C) T no es diagonalizable y una base de Jordan es $\{x^2, 1, 1 - x + x^2\}$.
D) T no es ni diagonalizable y una base de Jordan es $\{x^2, 1 + x^2, 1 - x + x^2\}$.

Solución: Hallamos la matriz asociada en la base canónica $E = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ (es la misma del ejemplo 77 del Libro Rojo):

$$A =_E (T)_E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_T = (2 - \lambda)^2 (7 - \lambda).$$

Cero no es valor propio, por lo tanto la transformación es inyectiva y por el teorema de las dimensiones también es sobreyectiva.

Operando, tenemos que los subespacios propios ***de la matriz*** son $S_2 = [(1, 0, 0)]$ y $S_7 = [(1, -1, 1)]$, por tanto la matriz no es diagonalizable y entonces T tampoco lo es.

La forma de Jordan es $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. La base de Jordan es $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ donde $T(v_1) = 2v_1 + v_2$, $T(v_2) = 2v_2$ y $T(v_3) = 7v_3$.

Como v_2 y v_3 son vectores propios podemos elegir $v_2 : v_2(x) = 1 \ \forall x$ y $v_3 : v_3(x) = 1 - x + x^2 \ \forall x$ (***Recordemos que los vectores propios de la matriz son las coordenadas de los vectores propios del operador***).

Resolviendo el sistema $(T - 2I)(v_1) = v_2$, (en coordenadas puede verse en la página 71 del Libro Rojo) hallamos que $coord_E(v_1) = (a, 0, 1) \ : a \in \mathbb{R}$.

Tomando $a = 0$ queda $coord_E(v_1) = (0, 0, 1)$ y por tanto $v_1 : v_1(x) = x^2 \ \forall x$.

La base de Jordan es entonces el conjunto formado por los tres vectores (polinomios) $B = \{x^2, 1, 1 - x + x^2\}$.

2) Sea $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty\}$ con la estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
Considera los subconjuntos $A = \{e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{x^m, m \in \mathbb{N}\}$.
Si $T : V \to V$ es el operador de derivación, es decir, $T(f) = f'$, entonces:
A) A es un conjunto de vectores propios de T mientras que B no lo es.
B) B es un conjunto de vectores propios de T mientras que A no lo es.
C) Tanto A como B son conjuntos de vectores propios de T.
D) Ni A ni B son conjuntos de vectores propios de T.
Solución: $T(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}$, por lo que $e^{\alpha x}$ es un vector propio con valor propio α, por lo que A es un conjunto de vectores propios. Por otro lado $T(x^m) = mx^{m-1} = \lambda x^m$ sii $m = \lambda = 0$, pero en el resto de los casos ($m > 0$) no es vector propio. Por lo tanto B no es un conjunto de vectores propios.

3) Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0{,}5 & 1 \\ -0{,}5 & -7{,}5 & 1 & -1{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}4 & 8{,}3 & -0{,}4 \\ 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & -2{,}1 \end{pmatrix}$.

Se hacen las siguientes afirmaciones:
(i) A es diagonalizable.
(ii) A es invertible.
Entonces:
A) Ambas afirmaciones son verdaderas.
B) Ambas afirmaciones son falsas.
C) Solamente la afirmación (ii) es verdadera.
D) Solamente la afirmación (i) es verdadera.
Solución: Los discos de Gershgorin de A son (convertimos las fracciones, $\frac{83}{10} = 8{,}3$ p.ej.) :
$C_1 = B[4, 2{,}5]$, $C_2 = B[-7{,}5, 3]$, $C_3 = [8{,}3, 2{,}3]$ y $C_4 = B[-2{,}1, 2]$, donde $B[c, r]$ denota el disco de centro c y radio r.

C_1 y C_3 forman una unión disjunta de los restantes discos, podemos afirmar que en dicha unión hay 2 valores propios, los que pueden ser distintos o un valor propio con m.a.=2.

Por otro lado los discos C_2 y C_4 son disjuntos, por lo que en c/u hay un valor propio, A tiene 2 valores propios negativos y distintos.

Como ninguno de los discos incluye al 0 podemos afirmar que 0 no es valor propio, esto implica que A es invertible.

Si hacemos los discos de Gershgorin de A^t tenemos:
$C_1' = B[4, 2],\ C_2' = B[-7{,}5, 2{,}9],\ C_3' = B[8{,}3, 2],\ C_4' = B[-2{,}1, 2{,}9]$.

Como A y A^t tienen los mismos valores propios, los mismos deben hallarse en la intersección $(\cup_i C_i) \cap (\cup_i C_i')$.

Notemos que ahora los discos C_1' y C_3' son disjuntos, lo que separa los dos valores propios positivos, que ahora sabemos son distintos.

Por tanto A tiene 4 valores propios distintos, es diagonalizable.

En suma, A es diagonalizable e invertible.

4) En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se define el producto interno

$$\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \rangle := 2a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + 4a_{22}b_{22}$$

Sea D el subespacio de las matrices diagonales, entonces:

A) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{b.o.n.} D$

B) $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{b.o.n.} D$

C) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{b.o.n.} D^{\perp}$

D) Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $P_D(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Solución:

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ pero $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \neq 1$, por tanto el conjunto de A) no es base ortonormal.

$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$, $\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$ y $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 1$, por lo tanto el conjunto de B) es base ortonormal.

Como $\dim(V) = 4$ y $\dim(D) = 2$, de donde $\dim(D^{\perp}) = 2$ por lo que $D^{\perp}$ no puede tener una base con un solo vector. Esto descarta de plano al conjunto de la opción C).

Una base ortonormal de D es $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right\}$,

por lo que $P_D(M)$ es

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto descarta a la opción D).

5) Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y un operador lineal $T : V \to V$. Se define $[\cdot, \cdot] : V \times V \to \mathbb{R} \;/\; [v, w] := \langle T(v), T(w) \rangle$.

Si $[\cdot, \cdot]$ es un producto interno, entonces:

A) T es inyectiva.

B) T es diagonalizable.

C) T es diagonalizable e inyectiva.

D) T no es diagonalizable.

Solución:

Como $[.,.]$ es un producto interno, entonces $[v,v]=0$ sii $v=o$, para ello debe cumplirse que $<T(v),T(v)>=0$ sii $v=o$, y esto solamente es posible si T es inyectiva, si $N(T)=\{o\}$ (de existir $v\neq o$ tal que $T(v)=o$ tendríamos que $[v,v]=<T(v),T(v)>=0$ con $v\neq o$).

Esto nos dice que si $[.,.]$ es un producto interno entonces 0 no puede ser valor propio de T.

Por tanto T es inyectiva.

Por otra parte existen ejemplos de T inyectivas diagonalizables (p.ej. la identidad) y de T inyectivas no diagonalizables (ejemplos 49 y 52 del Libro Rojo), por lo que si $[.,.]$ es un producto interno lo único que se puede afirmar con certeza es que T es inyectiva.

Ejercicio de Desarrollo

1. Es toda transformación lineal $T:V\to V$ tal que existe una base $\mathbb{B}$ base de V tal que ${}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}$ es diagonal (Def. 47 Libro Rojo). Una matriz cuadrada $M_{n\times n}$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal (Def. 48 Libro Rojo).
2. (Teo. 50 Libro Rojo)

   ($\Rightarrow$) Supongamos que ${}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}$ es diagonal con elementos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ en la diagonal y que $\mathbb{B}=\{v_1,\ldots,v_n\}$. Entonces $\mathrm{coord}_{\mathbb{B}}(Tv_i)=\lambda_i e_i\Rightarrow Tv_i=\lambda_i v_i\to v_i$ vector propio, por lo tanto $\mathbb{B}$ es una base de vectores propios.

   ($\Leftarrow$) Si $\mathbb{B}=\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de vectores propios, entonces $Tv_i=\lambda_i v_i$ para ciertos λ_i, de modo que $\mathrm{coord}_{\mathbb{B}}(Tv_i)=\lambda_i e_i\Rightarrow {}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}$ es diagonal.
3. Hallaremos la matriz asociada a T en la base canónica $E=\{1,x,x^2\}$.

   Como $T(1)=0+1, T(x)=1+0, T(x^2)=2x+0$ la matriz será ${}_E(T)_E=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, de modo que su polinomio característico será $\chi_T(\lambda)=(1-\lambda)\lambda^2$. Basta ver la dimensión del espacio propio asociado al valor propio 0 para deducir la forma de Jordan y ver si es diagonalizable:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

de donde el rango tiene dimension 2 y el kernel dimensión 1, por lo que no es diagonalizable y la forma de Jordan es

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Para hallar una base de Jordan primero hallaremos un vector propio con valor propio 0 a partir de la matriz

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

tenemos que $x=-y$ y $z=0$, de donde $(1,-1,0)$ son las coordenadas del vector propio $1-x$. Verifiquemos: $T(1-x)=-1+1=0\checkmark$. Segundo hallaremos un vector propio con valor propio 1 que es $p(x)\equiv 1$ como ya chequeamos. Para hallar el otro elemento de la base de Jordan resolvemos la ecuación

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

de donde $z = -1/2$ y $y = 1 - x$, de modo que $(0, 1, -1/2)$ son las coordenadas de $x - x^2/2$ vector de Jordan. Verifiquemos: $T(x - x^2/2) = 1 - x + 0 = 0(x - x^2) + 1 - x$✓. De modo que una base de Jordan es $\{1, x - x^2/2, 1 - x\}$.