

PRIMER PARCIAL - SÁBADO 27 DE ABRIL DE 2024

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

**Ejercicios múltiple opción.**

Total: 20 puntos. Respuesta correcta: 4 puntos; respuesta incorrecta -1 punto; no responde: 0 punto.  
**Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros y espacios correspondientes.**

1	2	3	4	5

**Ejercicio 1**

Sea  $V = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ de clase } C^\infty\}$  con la estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Considera los subconjuntos  $A = \{e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}\}$  y  $B = \{x^m, m \in \mathbb{N}\}$ .

Si  $T : V \rightarrow V$  es el operador de derivación, es decir,  $T(f) = f'$ , entonces:

- A) Tanto  $A$  como  $B$  son conjuntos de vectores propios de  $T$ .
- B) Ni  $A$  ni  $B$  son conjuntos de vectores propios de  $T$ .
- C)  $A$  es un conjunto de vectores propios de  $T$  mientras que  $B$  no lo es.
- D)  $B$  es un conjunto de vectores propios de  $T$  mientras que  $A$  no lo es.

**Ejercicio 2**

Sea  $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$  tal que

$$T(a + bx + cx^2) = (2a - 4b + c) + 7bx + (-5b + 2c)x^2$$

Entonces:

- A)  $T$  no es diagonalizable y una base de Jordan es  $\{x^2, 1, 1 - x + x^2\}$ .
- B)  $T$  no es diagonalizable y una base de Jordan es  $\{x^2, 1 + x^2, 1 - x + x^2\}$ .
- C)  $T$  no es diagonalizable y no es sobreyectiva.
- D)  $T$  no es diagonalizable y  $p : p(x) = x^2$  es vector propio de  $T$ .

**Ejercicio 3**

Sean  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y un operador lineal  $T : V \rightarrow V$ . Se define  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{R} / [v, w] := \langle T(v), T(w) \rangle$ .

Si  $[\cdot, \cdot]$  es un producto interno, entonces:

- A)  $T$  es inyectiva.
- B)  $T$  es diagonalizable.
- C)  $T$  es diagonalizable e inyectiva.
- D)  $T$  no es diagonalizable.

**Ejercicio 4** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{15}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{5} & \frac{83}{10} & -\frac{2}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{21}{10} \end{pmatrix}$$

Se hacen las siguientes afirmaciones:

- (i)  $A$  es diagonalizable.
- (ii)  $A$  es invertible.

Entonces:

- A) Ambas afirmaciones son falsas.
- B) Solamente la afirmación (i) es verdadera.
- C) Solamente la afirmación (ii) es verdadera.
- D) Ambas afirmaciones son verdaderas.

**Ejercicio 5**

En  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  se define el producto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle := 2a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + 4a_{22}b_{22}$$

Sea  $D$  el subespacio de las matrices diagonales, entonces:

- A)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{b.o.n.}} D$
- B)  $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{b.o.n.}} D$
- C)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{b.o.n.}} D^\perp$
- D) Si  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , entonces  $P_D(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**Ejercicio de desarrollo (20 puntos).**

- 1- Dado  $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$  de dimensión finita, defina operador lineal diagonalizable y matriz diagonalizable.
- 2- Demuestre que  $T : V \rightarrow V$  es diagonalizable sii existe una base de  $V$  de vectores propios de  $T$ .
- 3- Sea  $V = \mathbb{R}_2[x]$  el E.V. de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 y el O.L.  $T : V \rightarrow V / T(p)(x) = p'(x) + p(0), \forall x \in \mathbb{R}$ .  
Investigue si  $T$  es diagonalizable.  
En caso de serlo, encuentre su forma diagonal y la base correspondiente. En caso de no serlo, encuentre su forma de Jordan y la base correspondiente.