Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Primer Semestre 2024**

PRIMER PARCIAL - SÁBADO 27 DE ABRIL DE 2024

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

Ejercicios múltiple opción.

Total: 20 puntos. Respuesta correcta: 4 puntos; respuesta incorrecta -1 punto; no responde: 0 punto. **Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros y espacios correspondientes.**

1	2	3	4	5

Ejercicio 1

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T(a + bx + cx^2) = (2a - 4b + c) + 7bx + (-5b + 2c)x^2$$

Entonces:

A) T no es diagonalizable y no es sobreyectiva.
B) T no es diagonalizable y $p : p(x) = x^2$ es vector propio de T.
C) T no es diagonalizable y una base de Jordan es $\{x^2, 1, 1 - x + x^2\}$.
D) T no es diagonalizable y una base de Jordan es $\{x^2, 1 + x^2, 1 - x + x^2\}$.

Ejercicio 2

Sea $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty\}$ con la estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
Considera los subconjuntos $A = \{e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{x^m, m \in \mathbb{N}\}$.
Si $T : V \to V$ es el operador de derivación, es decir, $T(f) = f'$, entonces:

A) A es un conjunto de vectores propios de T mientras que B no lo es.
B) B es un conjunto de vectores propios de T mientras que A no lo es.
C) Tanto A como B son conjuntos de vectores propios de T.
D) Ni A ni B son conjuntos de vectores propios de T.

Ejercicio 3

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{15}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{5} & \frac{83}{10} & -\frac{2}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{21}{10} \end{pmatrix}$$

.

Se hacen las siguientes afirmaciones:

(i) A es diagonalizable.

(ii) A es invertible.

Entonces:

A) Ambas afirmaciones son verdaderas.

B) Ambas afirmaciones son falsas.

C) Solamente la afirmación (ii) es verdadera.

D) Solamente la afirmación (i) es verdadera.

Ejercicio 4

En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se define el producto interno

$$\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \rangle := 2a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + 4a_{22}b_{22}$$

Sea D el subespacio de las matrices diagonales, entonces:

A) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \overset{b.o.n.}{\longrightarrow} D$

B) $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \overset{b.o.n.}{\longrightarrow} D$

C) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \overset{b.o.n.}{\longrightarrow} D^{\perp}$

D) Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $P_D(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ejercicio 5

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y un operador lineal $T : V \to V$. Se define $[\cdot, \cdot] : V \times V \to \mathbb{R} \;/\; [v, w] := \langle T(v), T(w) \rangle$.

Si $[\cdot, \cdot]$ es un producto interno, entonces:

A) T es inyectiva.

B) T es diagonalizable.

C) T es diagonalizable e inyectiva.

D) T no es diagonalizable.

Ejercicio de desarrollo (20 puntos).

1- Dado $(V, \mathbb{K}, +, .)$ de dimensión finita, defina operador lineal diagonalizable y matriz diagonalizable.

2- Demuestre que $T : V \to V$ es diagonalizable sii existe una base de V de vectores propios de T.

3- Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el E.V. de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 y el O.L. $T : V \to V \;/\; T(p)(x) = p'(x) + p(0), \forall x \in \mathbb{R}$.
Investigue si T es diagonalizable.
En caso de serlo, encuentre su forma diagonal y la base correspondiente. En caso de no serlo, encuentre su forma de Jordan y la base correspondiente.