Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2024**

PRIMER PARCIAL - SÁBADO 27 DE ABRIL DE 2024

Múltiple opción

VERSIÓN 1.

1	2	3	4	5
C	A	A	B	A

VERSIÓN 2.

1	2	3	4	5
C	A	A	D	B

Justificaciones.

Ejercicio de Desarrollo

1. Es toda transformación lineal $T : V \to V$ tal que existe una base $\mathbb{B}$ base de V tal que ${}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}$ es diagonal (Def. 47 Libro Rojo). Una matriz cuadrada $M_{n\times n}$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal (Def. 48 Libro Rojo).
2. (Teo. 50 Libro Rojo)

   ($\Rightarrow$) Supongamos que ${}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}$ es diagonal con elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en la diagonal y que $\mathbb{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Entonces $\text{coord}_{\mathbb{B}}(Tv_i) = \lambda_i e_i \Rightarrow Tv_i = \lambda_i v_i \to v_i$ vector propio, por lo tanto $\mathbb{B}$ es una base de vectores propios.

   ($\Leftarrow$) Si $\mathbb{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de vectores propios, entonces $Tv_i = \lambda_i v_i$ para ciertos λ_i, de modo que $\text{coord}_{\mathbb{B}}(Tv_i) = \lambda_i e_i \Rightarrow {}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}$ es diagonal.
3. Hallaremos la matriz asociada a T en la base canónica $E = \{1, x, x^2\}$.

   Como $T(1) = 0 + 1, T(x) = 1 + 0, T(x^2) = 2x + 0$ la matriz será ${}_E(T)_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de modo que su polinomio característico será $\chi_T(\lambda) = (1-\lambda)\lambda^2$. Basta ver la dimensión del espacio propio asociado al valor propio 0 para deducir la forma de Jordan y ver si es diagonalizable:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde el rango tiene dimension 2 y el kernel dimensión 1, por lo que no es diagonalizable y la forma de Jordan es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para hallar una base de Jordan primero hallaremos un vector propio con valor propio 0 a partir de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que $x = -y$ y $z = 0$, de donde $(1, -1, 0)$ son las coordenadas del vector propio $1 - x$. Verifiquemos: $T(1 - x) = -1 + 1 = 0\checkmark$. Segundo hallaremos un vector propio con valor propio 1 que es $p(x) \equiv 1$ como ya chequeamos. Para hallar el otro elemento de la base de Jordan resolvemos la ecuación

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

de donde $z = -1/2$ y $y = 1 - x$, de modo que $(0, 1, -1/2)$ son las coordenadas de $x - x^2/2$ vector de Jordan. Verifiquemos: $T(x - x^2/2) = 1 - x + 0 = 0(x - x^2) + 1 - x\checkmark$. De modo que una base de Jordan es $\{1, x - x^2/2, 1 - x\}$.