Geometría y Álgebra lineal 2.
Solución examen julio.

13 de julio de 2022.

Ejercicio Verdadero/ Falso

Afirmación 1: La afirmación es falsa. Basta tomar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 0)$. Se tiene que $T(1, 0) = T(0, 1) = (1, 0)$ y $T(1, -1) = (0, 0)$.

Afirmación 2: La afirmación es falsa. Ya que si $V = \mathbb{R}^2$ con el producto interno usual, se tiene que $\langle (1, 0),(0, 1)\rangle = 0$ y ninguno de los vectores es nulo.

Afirmación 3: La afirmación es falsa. La rotación de ángulo $\pi/2$ es ortogonal y no es diagonalizable.

Afirmación 4: La afirmación es falsa. Basta tomar $T(v) = 0$ para todo $v \in V$ (la transformación nula) es autoadjunta y no es biyectiva.

Afirmación 5: La afirmación es verdadera. Recordar que $P_S(v) \in S$ para todo $v \in V$ y que si $s \in S$ entonces $P_S(s) = s$. Luego, tomando $s = P_S(v)$ se tiene que $P_S(s) = s$, o sea que $P_S(P_S(v)) = P_S(v)$.

Ejercicios de múltiple opción.

Ejercicio 1.
Haciendo cuentas, se tiene que

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 + (-a-6)\lambda + 6a - 2).$$

Luego, se tiene que si $a > \frac{1}{3}$ se cumple que $6a - 2 > 0$ y que $-a - 6 < 0$. Usando la regla de Descartes, tenemos tres raices positivas. Por lo tanto, f es definida positiva. La opción A es la verdadera.

Ejercicio 2.

Consideremos $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0),(0, 1, 0),(0, 0, 1)\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^3$ que es una base ortonormal.
Como $(1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1)$, entonces $T(1, 1, 1) = T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) + T(0, 0, 1)$.
Mirando la matriz asociada en la base B tenemos que:

- $T(1,1,1) = 0(1,0,0) - i(0,1,0) + 0(1,1,1) = (0,-i,0)$.

- $T(1,0,0) = 1(1,0,0) + 3(0,1,0) + 1(1,1,1) = (2,4,1)$.

- $T(0,1,0) = -3i(1,0,0) + 4(0,1,0) + 2(1,1,1) = (-3i+2,6,2)$.

Despejando, obtenemos que

$$T(0,0,1) = (-4+3i, -10-i, -3).$$

Luego

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 2-3i & -4+3i \\ 4 & 6 & -10-i \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por ser $\mathcal{E}$ ortonormal, tenemos que

$$_{\mathcal{E}}(T^*)_{\mathcal{E}} = \overline{_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}^t} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2+3i & 6 & 2 \\ -4-3i & -10+i & -3 \end{pmatrix},$$

Como

$$_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}\,\mathcal{E}}(T^*)_{\mathcal{E}\,\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}},$$

haciendo cuentas se llega a que

$$_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6+3i & 14-i & 24+2i \\ 6+6i & 16-i & 27+5i \\ -4-3i & -10+i & -17-2i \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la opción correcta es la C.

Ejercicio 3.
Consideremos el ejemplo $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $T(x,y) = (2x,3y)$. T tiene dos valores propios $\lambda = 2$ y $\mu = 3$. $S_\lambda = \{(x,0) \text{ con } x \in \mathbb{C}\}$, $S_\mu = \{(0,y) \text{ con } y \in \mathbb{C}\}$ y $S_\lambda^\perp = S_\mu$. T no es unitario ya que tiene valores propios de módulo distinto de uno. Además, como $V = S_\lambda \bigoplus S_\lambda^\perp$ y $S_\lambda^\perp = S_\mu$, entonces $V = S_\lambda \bigoplus S_\mu$. Si B_1 es una base ortonormal de S_λ y B_2 es una base ortonormal de S_μ, se cumple que $B_1 \cup B_2$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$, formada por vectores propios. Por lo tanto, la opción correcta es la B.

Ejercicio 4.
Se recuerda que dos transformaciones lineales $S, T : V \to V$ verifican que $S(v) = T(v)$ para todo $v \in V$ si y solo si $S(v_i) = T(v_i)$ para $i = 1, ..., n$ siendo $\{v_1, ..., v_n\}$ una base de V.
Tomemos s_1 y s_2 dos vectores de S que sean li. Por ejemplo $s_1 = (0,1,-1)$ y $s_2 = (1,-2,0)$.
Como $s_1, s_2 \in S$, se tiene que $P_S(s_1) = s_1$ y $P_S(s_2) = s_2$.
Como $(2,1,-1) \in S^\perp$ entonces $P_S(2,1,-1) = (0,0,0)$. Luego $\{(0,1,-1),(1,-2,0),(2,1,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y además T y P_S coinciden en todos los elementos. Por lo tanto $T(v) = P_S(v)$ para todo $v \in V$. Por lo tanto, la opción correcta es la A.

Ejercicios de desarrollo.

Ejercicio 1.
Si $\{v_1, v_2\}$ es linealmente dependiente, existe $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ tal que $v_1 = \alpha v_2$ o $\alpha v_1 = v_2$. Supongamos que $v_1 = \alpha v_2$. Aplicando T a ambos miembros, se obtiene que $T(v_1) = T(\alpha v_2)$. Usando que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ y $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ se concluye que $\lambda_1 v_1 = \alpha \lambda_2 v_2$. Usando que $v_1 = \alpha v_2$, se tiene que

$$\lambda_1 v_1 = \lambda_1 \alpha v_2 = \alpha \lambda_2 v_2.$$

Como $\alpha \neq 0$ se tiene que $\lambda_1 v_2 = \lambda_2 v_2$. Como $v_2 \neq 0$, se concluye que $\lambda_1 = \lambda_2$. Lo cual es absurdo. El mismo razonamiento vale si $\alpha v_1 = v_2$.

Ejercicio 2. parte 1 y 2, ver las notas del curso: Transformaciones lineales en espacios con P.I.