Geometría y Álgebra lineal 2

primer semestre de 2022

Examen Julio

13 de julio de 2022.

N° Examen	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

VERDADERO/FALSO (Total: 15 puntos)				
1	**2**	**3**	**4**	**5**

Llenar cada casilla con las respuestas **V** (verdadero) o **F** (falso), según corresponda.
Correctas: 3 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 punto.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 56 puntos)			
1	**2**	**3**	**4**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.
Correctas: 14 puntos. Incorrectas: -3 puntos. Sin responder: 0 puntos.

La duración del examen es de tres horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.
Para aprobar se necesita un mínimo de 60 puntos.

SÓLO PARA USO DOCENTE			
VF	**MO**	**Des.**	**Total**

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 15 puntos)

Correctas: 3 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 punto.

El siguiente ejercicio tiene afirmaciones, las cuales se deben determinar si son verdaderas o falsas.

Afirmación 1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $\langle\, ,\, \rangle$, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y $T : V \to V$ lineal. Si $||T(v_i)|| = ||v_i||$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $||T(v)|| = ||v||$ para todo $v, \in V$.

Afirmación 2. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\, ,\, \rangle$. Si $\langle v, w\rangle = 0$, entonces $v = 0$ o $w = 0$.

Afirmación 3. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal ortogonal, entonces T es diagonalizable.

Afirmación 4. Si $T : V \to V$ es autoadjunta, entonces T es biyectiva.

Afirmación 5. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\, ,\, \rangle$, $S \subset V$ un subespacio y $P_S : V \to V$ la proyección sobre S. Entonces $P_S(P_S(v)) = P_S(v)$, para todo $v \in V$.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 56 puntos)

Correctas: 14 puntos. Incorrectas: -3 puntos. Sin responder: 0 puntos.

1. Sea f una forma cuadrática definida en $\mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

A. Si $a > \frac{1}{3}$, f es definida positiva.

B. Si $a < -6$, f es definida negativa.

C. f es indefinida para todo $a \in \mathbb{R}$.

D. Si $a > 0$, f es definida positiva.

2. Sea $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ el operador lineal que satisface

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3i & 0 \\ 3 & 4 & -i \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$. Entonces, la matriz $_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}}$ es igual a:

A. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2+3i & 6 & 2 \\ -4-3i & -10+i & -3 \end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3i & 4 & 2 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} 6+3i & 14-i & 24+2i \\ 6+6i & 16-i & 27+5i \\ -4-3i & -10+i & -17-2i \end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix} 6-3i & 14+i & 24-2i \\ 6-6i & 16+i & 27-5i \\ -4+3i & -10-i & -17+2i \end{pmatrix}$.

3. Sea $T\colon V \to V$ un operador sobre un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Si λ, μ son valores propios distintos y reales de T tal que $S_\lambda^\perp = S_\mu$. Entonces, se puede afirmar que :

A. T es unitario y $S_\lambda \oplus S_\mu = V$.

B. Existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T, pero T no es necesariamante unitario.

C. T es una isometría y $S_\lambda^\perp$ es invariante bajo T.

D. Si $\mu = 1$, entonces necesariamente $\lambda = -1$ y T es un operador unitario.

4. Se considera el subespacio $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

1. $T|_S = Id$.
2. $(2, 1, -1) \in \ker(T)$.

Indicar la opción correcta:

A. Si $P_S : V \to V$ es la proyección ortogonal sobre S, entonces $T(v) = P_S(v)$ para todo $v \in V$.

B. La matriz asociada a T en la base canónica ${}_C(T)_C$ es: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$

C. Si $P_{S^\perp} : V \to V$ es la proyección ortogonal sobre $S^\perp$, entonces $T(v) = P_{S^\perp}(v)$ para todo $v \in V$.

D. La matriz asociada a T en la base canónica ${}_C(T)_C$ es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio de desarrollo (Total: 29 puntos)

1. (9 puntos) Sea $T : V \to V$ una transformación lienal que tiene dos valores propios distintos, λ_1 y λ_2. Sean $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, tales que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, $T(v_2) = \lambda_2 v_2$. Probar que $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente.

2. (20 puntos) Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, con producto interno $\langle\, ,\, \rangle$ y T un operador unitario en V.

1. Sean λ_1 y λ_2 son valores propios distintos de T. Probar que si $v \in S_{\lambda_1}$ y $w \in S_{\lambda_2}$ entonces $\langle v, w\rangle = 0$. (10 puntos)
2. Sea $S \subset V$ un subespacio con $T(S) \subset S$. Probar que $T(S^\perp) \subset S^\perp$. (10 puntos)