Geometría y Álgebra lineal 2.
Solución segundo parcial.

25 de junio de 2022.

Ejercicio Verdadero/ Falso

Afirmación 1: La afirmación es falsa. Ya que existen muchas matrices P tales que $D = P^{-1}AP$. Para que se cumpla que $P^t = P^{-1}$ hay que tomar P de forma que las columnas formen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
Por ejemplo, consideramos $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $D = P^{-1}AP$ con $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y una P posible es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, que claramente no es ortogonal.

Afirmación 2: La afirmación es verdadera. Ya que $\langle T(v), -w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$ si y solo si $\langle T(v), w\rangle = \langle v, -T(w)\rangle$. Luego, por definición y unicidad de T^*, se tiene que $T^* = -T$.

Afirmación 3: La afirmación es falsa. Basta tomar $B = \{(cos(\theta), sen(\theta)), (-sen(\theta), cos(\theta))\}$, con $\theta \notin \{0, \pi\}$.

Afirmación 4: La afirmación es falsa. Basta tomar $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Afirmación 5: La afirmación es verdadera. Para definir P_S hay que tomar una base $\{s_1, ..., s_r\}$ ortonormal de S y luego $P_S(v) = \sum_{i=1}^r \langle v, s_i\rangle s_i$. Por lo tanto, si v es tal que $P_S(v) = 0$, esto implica que $\langle v, s_i\rangle = 0$ para todo $i = 1, .., r$. Lo que implica que $v \in S^\perp$.

Ejercicios de múltiple opción.

Ejercicio 1.
El dato $T(u) = -2u$ para todo $u \in S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, implica que -2 es valor propio con multiplicidad algebraica por lo menos dos, ya que $dim(S) = 2$. Como T es autoadjunta, entonces es diagonalizable. Como $tr(T) = -1$, se tiene que el otro valor propio es 3. Además se tiene que cumplir (por ser T autoadjunta) que $S_3 \perp S$.

Vamos es descomponer el vector $(2, 1, 1)$ de la forma $(2, 1, 1) = u + u^\perp$ donde $u \in S$ y $u^\perp \in S^\perp = S_3$.
Pirmero, hallemos $S^\perp$. Recordemos que $v \in S^\perp$ si y solo si $\langle v, s\rangle = 0$ para todo $s \in S$ si y solo si $\langle v, (1, 0, 0)\rangle = \langle v, (0, 1, 0)\rangle = 0$.

Sea $v = (x, y, z)$, entonces $\langle v, (1, 0, 0)\rangle = x - z$. Y $\langle v, (0, 1, 0)\rangle = y$. Por lo tanto $v = (z, 0, z)$ con $z \in \mathbb{R}$.

Luego $(2, 1, 1) = u + u^\perp = (x, y, 0) + (z, 0, z)$, de donde obtenemos que $x + z = 2$, $y = 1$ y $z = 1$. Resolviendo el sistema, tenemos que $(2, 1, 1) = (1, 1, 0) + (1, 0, 1)$.

Como $(1, 1, 0) \in S$ entonces $T(1, 1, 0) = -2(1, 1, 0)$. Como Como $(1, 0, 1) \in S^\perp = S_3$, entonces $T(1, 0, 1) = 3(1, 0, 1)$.

Luego $T(2, 1, 1) = T(1, 1, 0) + T(1, 0, 1) = -2(1, 1, 0) + 3(1, 0, 1) = (1, -2, 3)$.

Ejercicio 2.
Para que T sea unitaria se tiene que cumplir que

$$\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle \ \ \forall v, w \in \mathbb{C}^3.$$

Si consideramos $v = (\sqrt{2}, 0, 0)$ y $w = (0, c, 0)$ obtenemos

$$0 = \langle(\sqrt{2}, 0, 0), (0, c, 0)\rangle = \langle(a, 0, i), (-1, a, i)\rangle = -a + 1.$$

Si consideramos $v = (\sqrt{2}, 0, 0)$ y $w = (0, 0, -\sqrt{6})$ obtenemos

$$0 = \langle(\sqrt{2}, 0, 0), (0, 0, -\sqrt{6})\rangle = \langle(a, 0, i), (a, b, -1)\rangle = a^2 - i.$$

Como no existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $-a + 1 = 0$ y $a^2 - i = 0$, no existe un valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual T sea unitaria. La respuesta correcta es la opción D.

Ejercicio 3.
Recordemos que el vector $s \in S$ que minimiza $||u - s||$ se obtiene tomando $s = P_S(u)$. Como $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$, entonces $S^{\perp} = [(2, 1, -1)]$. Por lo tanto $P_{S^{\perp}}(v) = \langle v, \frac{(2,1,-1)}{\sqrt{6}}\rangle \frac{(2,1,-1)}{\sqrt{6}}$. Luego

$$P_{S^{\perp}}(1, 1, 1) = \langle(1, 1, 1), \frac{(2, 1, -1)}{\sqrt{6}}\rangle \frac{(2, 1, -1)}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}(2, 1, -1)\cdot$$

Como $u = P_S(u) + P_{S^{\perp}}(u)$. Por lo tanto

$$P_S(u) = u - P_{S^{\perp}}(u) = (1, 1, 1) - \frac{1}{3}(2, 1, -1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Ejercicio 4.
Recordemos que T^* es la única transformación lineal que verifica:

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle \ \ \forall v, w \in \mathbb{R}^{2022}.$$

Consideremos $w = (1, 2, \ldots, 2022)$, y $v = (x_1, \ldots, x_{2022})$. Entonces se debe verificar que

$$\langle T(x_1, \ldots, x_{2022}), (1, 2, \ldots, 2022)\rangle = \langle(x_1, \ldots, x_{2022}), T^*(1, 2, \ldots, 2022)\rangle.$$

Como $T(x_1, \ldots, x_{2022}) = (0, x_1, \ldots, x_{2021})$, sustituyendo, se tiene que

$$\langle(0, x_1, \ldots, x_{2021}), (1, 2, \ldots, 2022)\rangle = \langle(x_1, \ldots, x_{2022}), T^*(1, 2, \ldots, 2022)\rangle.$$

Como $\langle(0, x_1, \ldots, x_{2021}), (1, 2, \ldots, 2022)\rangle = 2x_1 + \cdots 2022x_{2021}$ se tiene que

$$\langle(x_1, \ldots, x_{2022}), T^*(1, 2, \ldots, 2022)\rangle = 2x_1 + \cdots + 2022x_{2021}.$$

Luego la opción B, o sea $T^*(1, 2, \ldots, 2022) = (2, 3, \ldots, 2022, 0)$, es la que verifica la última igualdad.

Ejercicios de desarrollo.

Ejercicio 1. Ver las notas del curso: Transformaciones lineales en espacios con P.I.

Ejercicio 2.
Como $\lambda = 1$ es valor propio, existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = v$. Podemos suponer que $||v|| = 1$, si v no tiene norma uno, consideramos $w = \frac{v}{||v||}\cdot$ Consideramos $v_1 \in \mathbb{R}^2$, con $||v_1|| = 1$, tal que $\langle v, v_1 \rangle = 0$. Por lo tanto, $B = \{v, v_1\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Luego

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Como B es una base ortonormal y T es ortogonal, entonces las columnas de $_B(T)_B$ tiene que formar una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Esto implica que $a^2 + b^2 = 1$ y $\langle (1,0), (a,b) \rangle = a = 0$. Luego $b = 1$ o $b = -1$. $b = -1$ no puede ser porque en ese caso $\chi_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Por lo tanto $b = 1$ y

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$