Geometría y Álgebra lineal 2

primer semestre de 2022

Segundo parcial

25 de junio de 2022.

N° parcial	Cédula	Apellido y Nombre	Grupo de Teórico	
			Presencial	
			Virtual	
			Openfing	

VERDADERO/FALSO (Total: 10 puntos)				
1	**2**	**3**	**4**	**5**

Llenar cada casilla con las respuestas **V** (verdadero) o **F** (falso), según corresponda.
Correctas: 2 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 punto.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 32 puntos)			
1	**2**	**3**	**4**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.
Correctas: 8 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 punto.

La duración del parcial es de tres horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

SÓLO PARA USO DOCENTE			
VF	**MO**	**Des.**	**Total**

Atención: Todos los espacios vectoriales considerados en este parcial son de dimensión finita.

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 10 puntos)

Correctas: 2 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 punto.

El siguiente ejercicio tiene afirmaciones, las cuales se deben determinar si son verdaderas o falsas.

Afirmación 1. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^t = A$. Si existe $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $D = P^{-1}AP$ con D diagonal. Entonces $P^{-1} = P^t$.

Afirmación 2. Sea V un espacio vectorial con producto interno y $T : V \to V$ lineal. Si $\langle T(v), -w)\rangle = \langle v, T(w)\rangle$ para todo $v, w \in V$, entonces $T^* = -T$.

Afirmación 3. Se considera $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual. Sea B una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y E la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces ${}_E(Id)_B$ es diagonalizable.

Afirmación 4. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^t = A$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(X) = X^tAX$. Si $det(A) > 0$ entonces f es una forma cuadrática definida positiva.

Afirmación 5. Sea V un espacio vectorial con producto interno, $S \subset V$ un subespacio y $P_S : V \to V$ la proyección ortogonal sobre S. Si $P_S(v) = 0$, entonces $v \in S^{\perp}$.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 32 puntos)

Correctas: 8 puntos. Incorrectas: - 2 puntos. Sin responder: 0 punto.

1. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto interno

$$\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3 - u_1v_3 - u_3v_1.$$

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ autoadjunta tal que:

- $T(u) = -2u$ para todo $u \in S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$
- $tr(T) = -1$

Entonces:

A. $T(2, 1, 1) = (1, -2, 3)$.

B. $T(2, 1, 1) = (-2, -2, 3)$.

C. $T(2, 1, 1) = (-2, -2, -1)$.

D. $T(2, 1, 1) = (1, -2, -1)$.

2. Sea $\mathbb{C}^3$ con el producto interno usual y $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ un operador lineal tal que $T(\sqrt{2},0,0) = (a,0,i)$, $T(0,c,0) = (-1,a,i)$ y $T(0,0,-\sqrt{6}) = (a,b,-1)$, donde $a,b,c \in \mathbb{R}$ y $c \neq 0$.
Entonces:

A. T es unitario para $a=-1, b=2$ y dos valores distintos de c.

B. T es unitario para $b=2, c=\sqrt{3}$ y dos valores distintos de a.

C. T es unitario para $a=1, b=2$ y dos valores distintos de c.

D. T no es unitario para ningún valor de $a,b,c \in \mathbb{R}$.

3. Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+y-z=0\}$ y $u=(1,1,1)$. Entonces el vector $s \in S$ que minimiza $||u-s||$ es:

A. $s = (-3,*,*)$.

B. $s = (2,*,*)$.

C. $s = (\frac{1}{3},*,*)$.

D. $s = (1,*,*)$.

4. Sea $\mathbb{R}^{2022}$ con el producto interno usual y $T\colon \mathbb{R}^{2022} \to \mathbb{R}^{2022}$ el operador lineal dado por

$$T(x_1,\ldots,x_{2022}) = (0,x_1,\ldots,x_{2021}).$$

Entonces:

A. $T^*(1,2,\ldots,2022) = (0,1,2,\ldots,2021)$.

B. $T^*(1,2,\ldots,2022) = (2,3,\ldots,2022,0)$.

C. $T^*(1,2,\ldots,2022) = (1,2,\ldots,2021,0)$.

D. $T^*(1,2,\ldots,2022) = (0,2,3,\ldots,2022)$.

Ejercicio de desarrollo (Total: 18 puntos)

1. (12 puntos) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{k}$, con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

1. Probar que si $\langle v,w_1\rangle = \langle v,w_2\rangle$ para todo $v \in V$, entonces $w_1 = w_2$. (5 puntos)
2. Sea $f : V \to \mathbb{k}$ funcional lineal. Probar que existe un único $w \in V$ tal que $f(v) = \langle v,w\rangle$ para todo $v \in V$. (7 puntos)

2. (6 puntos) Sea $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operador lineal ortogonal tal que el polinomio característico de T es, $\chi_T(\lambda) = (\lambda-1)^2$. Probar que T es diagonalizable.