Geometría y Álgebra lineal 2.
Solución primer parcial.

27 de abril de 2022.

Ejercicio Verdadero/ Falso

Afirmación 1: La afirmación es verdadera. Ver páginas 35-37 del libro rojo.

Afirmación 2: La afirmación es falsa. Ya que si $v \in P_2(\mathbb{R})$ es vector propio de T entonces $coord_B(v) \in \mathbb{R}^3$ es vector propio de A.

Afirmación 3: La afirmación es verdadera. Ver página 44, Corolario 54 del libro rojo.

Afirmación 4: La afirmación es verdadera. Ya que si tomamos $p = 1$, entonces $T(p) = 0$. Lo que implica que $\lambda = 0$ es valor propio.

Afirmación 5: La afirmación es verdadera. Ya que $A - \lambda I$ es semejante con $A' - \lambda I$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Basta tomar $\lambda = 1$.

Ejercicios de múltiple opción.

Ejercicio 1.
La afirmación 1 es falsa. Basta tomar $\alpha = -1$ y $z = (0,1,0)$. En este caso se tiene $\langle (0,1,0),(0,1,0)\rangle = -1$.

La afirmación 2 es falsa, ya que vale para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

La afirmación 3 es falsa ya que $\langle (-2,1,0),(1,i,3)\rangle = -2+\alpha(-i) = 0$ si y sólo si $\alpha = 2i$.

La afirmación 4 es verdadera.

$$\langle z,z\rangle = \langle (z_1,z_2,z_3),(z_1,z_2,z_3)\rangle = z_1\overline{z_1} + \alpha z_2\overline{z_2} + 3z_3\overline{z_3} = |z_1|^2 + \alpha|z_2|^2 + 3|z_3|^2.$$

Como $\alpha > 0$ entonces $|z_1|^2 + \alpha|z_2|^2 + 3|z_3|^2 = 0$ implica $z_1 = z_2 = z_3 = 0$.

Ejercicio 2.

- El dato que existe $v \in V$ con $v \neq 0$ tal que $T(v) = v$, nos dice que $\lambda = 1$ es valor propio.
- Como $dim(Ker(T - 3I)) = 1$, entonces $\lambda = 3$ es valor propio con $mg(3) = 1$.
- Como $dim(V) = 5$ entonces X_T es un polinomio de grado 5.

- Y como $X_T(\lambda) = (\lambda-2)^2 q(\lambda)$, entonces, juntando los datos anteriores, tenemos que $X_T(\lambda) = (\lambda-2)^n(\lambda-1)^m(\lambda-3)^s P(\lambda)$, donde $n \geq 2$, $m \geq 1$, $s \geq 1$ y P es un polinomio de grado menor o igual a uno.

- Si J es la matriz de Jordan, se tiene que la traza es $8+\lambda_5$. Como la traza tiene que ser 11, se concluye que $\lambda_5 = 3$.

- Como $mg(3) = 1$ se tiene que la matriz de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la opción correcta es la 4.

Ejercicios de desarrollo.

Ejercicio 1.

Apliquemos Gram-Schmidt.
Como S tiene dimensión tres, comencemos encontrando una base de S que contenga al vector $(0,0,0,1)$. Una posible base es $\{(0,0,0,1),(2,0,1,0),(0,2,1,0)\}$. Aplicando el proceso, tenemos que $u_1 = (0,0,0,1)$.
$u_2 = (2,0,1,0) - c(0,0,0,1)$, donde $c = \frac{<(2,0,1,0),(0,0,0,1)>}{<(0,0,0,1),(0,0,0,1)>} = 0$. Por lo tanto $u_2 = (2,0,1,0)$.
$u_3 = (0,2,1,0) - c_1(0,0,0,1) - c_2(2,0,1,0)$ donde $c_1 = \frac{<(0,2,1,0),(0,0,0,1)>}{<(0,0,0,1),(0,0,0,1)>} = 0$ y $c_2 = \frac{<(0,2,1,0),(2,0,1,0)>}{<(2,0,1,0),(2,0,1,0)>} = \frac{1}{5}$. Por lo tanto $u_3 = (-\frac{2}{5}, 2, \frac{4}{5}, 0)$. Luego la base ortonormal es

$$\left\{ (0,0,0,1), \frac{(2,0,1,0)}{\sqrt{5}}, \frac{(-\frac{2}{5},2,\frac{4}{5},0)}{\sqrt{\frac{24}{5}}} \right\}$$

Ejercicio 2.

Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tenemos que $det(A-\lambda I) = \lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2$. Lo que implica que $\lambda = -2$ es valor propio doble.
Resolviendo $(A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ queda que la solución es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -x+2y = 0\}$. Por lo tanto la multiplicidad geométrica del valor propio es uno, y la algebraica es dos. Esto implica que A no es diagonalizable y que su forma de Jordan es $J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Si la base de Jordan es $B = \{v_1, v_2\}$ entonces v_2 es vector propio y por lo tanto podemos tomar por ejemplo $v_2 = (2,1)$. Además v_1 tiene que verificar $T(v_1) = -2v_1 + v_2$. Sea $v_1 = (x,y)$, resolviendo la ecuación

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

queda que la solución es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -x+2y=1\}$. Tomando por ejemplo $y=0$ tenemos que $v_1=(-1,0)$. Por lo tanto, se tiene que $J=P^{-1}AP$, siendo $P=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Recordemos (ejercicio 6, práctico 4) que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$ y que $J^n = P^{-1}A^nP$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así que tenemos que

$$A^{1000} = PJ^{1000}P^{-1} = P\begin{pmatrix} (-2)^{1000} & 0 \\ 1000(-2)^{999} & (-2)^{1000} \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{1000} & 0 \\ 1000(-2)^{999} & (-2)^{1000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$