Geometría y Álgebra lineal 2

primer semestre de 2022

Primer parcial

27 de abril de 2022.

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

VERDADERO/FALSO (Total: 10 puntos)				
1	**2**	**3**	**4**	**5**

Llenar cada casilla con las respuestas **V** (verdadero) o **F** (falso), según corresponda.
Correctas: 2 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 punto.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 16 puntos)	
1	**2**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C** o **D**, según corresponda.
Correctas: 8 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

La duración del parcial es de tres horas y no se permite usar ni calculadora
ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

SÓLO PARA USO DOCENTE			
VF	**MO**	**Des.**	**Total**

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 10 puntos)

Correctas: 2 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 punto.

El siguiente ejercicio tiene 5 afirmaciones, las cuales se deben determinar si son verdaderas o falsas.

Sea $P_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos.

Sean $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal, $B = \{1, x, x^2\}$ una base de $P_2(\mathbb{R})$ y $A =_B (T)_B$.

Afirmación 1. Los valores propios de T y A son los mismos.

Afirmación 2. Los vectores propios de T y A son los mismos.

Afirmación 3. Si T tiene tres valores propios distintos dos a dos, entonces T es diagonalizable.

Afirmación 4. Si $T(p) = p^{'}$, donde $p^{'}$ significa la derivada de p, entonces $\lambda = 0$ es valor propio de T.

Afirmación 5. Si $B^{'}$ es otra base $P_2(\mathbb{R})$ y $A^{'} =_{B^{'}} (T)_{B^{'}}$, entonces $A - I$ y $A^{'} - I$ son semejantes, donde I es la matriz identidad.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 16 puntos)

Correctas: 8 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

1. Considere la siguiente función $<,>: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ dada por:
Si $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ y $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$ entonces

$$\langle z, w\rangle = \langle (z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)\rangle := z_1\overline{w_1} + \alpha z_2\overline{w_2} + 3z_3\overline{w_3}, \text{ donde } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Indicar la opción correcta.

1. Para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumple que $\langle z, z\rangle \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^3$.
2. La propiedad $\langle z, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle z, w\rangle$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ y $\forall z, w \in \mathbb{C}^3$, se cumple solo si $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\langle (-2, 1, 0), (1, i, 3)\rangle = 0$ se cumple solo para $\alpha = -2i$.
4. La propiedad $\langle z, z\rangle = 0$ implica $z = \overrightarrow{0}$ vale para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$.

2. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal con $dim(V) = 5$ y $K = \mathbb{C}$. Se sabe que:

- Existe $v \in V$ con $v \neq 0$ tal que $T(v) = v$.
- El polinomio característico de T, $X_T(\lambda) = (\lambda - 2)^2 q(\lambda)$.
- $mg(2) = 2$.
- $dim(Ker(T - 3I)) = 1$.

- la traza de T es 11.

Indicar la opción correcta:

1. T tiene cuatro valores propios distintos dos a dos y T no es diagonalizable.
2. T tiene cinco valores propios distintos dos a dos.
3. Los valores propios de T son 1,2 y 3 y además T es diagonalizable.
4. Los valores propios de T son 1,2 y 3 y además T no es diagonalizable.

Ejercicio de desarrollo (Total: 14 puntos)

1. (7 puntos) Consideramos $\mathbb{R}^4$ con el producto interno habitual y sea

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \; x + y - 2z = 0\}.$$

Usando el método de Gram-Schmidt, hallar una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ de S con $u_1 = (0, 0, 0, 1)$.

2. (7 puntos) Calcular $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1000}$.